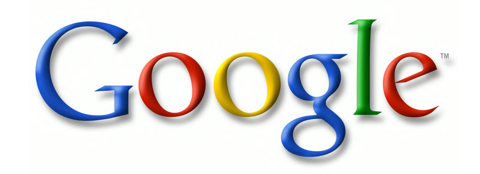






Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Achtundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin. 1885.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des achtundneunzigsten Bandes.

Druckfehler.

Seite 83, Zeile 5 v. u. lese man $\delta Q = \frac{m}{\int \frac{ds}{v}} \cdot \delta \int v\, ds.$

„ 86, „ 9 „ „ „ „ „dürfen“ statt „dürften“.

Die Mechanik in den Nicht-*Euklid*ischen Raumformen.

(Von Herrn *W. Killing* in Braunsberg.)

Die im *Euklid*ischen Raume von drei Dimensionen geltenden Bewegungsgleichungen lassen sich bekanntlich auf eine beliebig grosse Zahl von Dimensionen übertragen, und die Erlaubtheit dieser Uebertragung wird auch geometrisch unmittelbar erkannt. Im Anschlusse daran stellt sich die vorliegende Arbeit an erster Stelle die Aufgabe, aus den mechanischen Principien diejenigen Bewegungsgleichungen herzuleiten, welche sich ergeben, wenn man ausser von der Dreizahl der Dimensionen auch vom Parallelaxiom absieht. Dem erhaltenen Resultat kann folgende Form gegeben werden: Man bestimme in einer $(n+1)$-fach ausgedehnten *Euklid*ischen Raumform die Bewegungsgleichungen für Punkte, welche bei Beginn der Bewegung einem n-fach ausgedehnten Kugelgebilde angehören und gezwungen sind, während der Bewegung auf demselben zu verbleiben; die so erhaltenen Gleichungen gelten für eine Nicht-*Euklid*ische Raumform von n Dimensionen; für einen endlichen Raum müssen der Radius und alle Coordinaten reell sein, für die *Lobatschewsky*sche Raumform müssen der Radius und eine Coordinate rein imaginär, die übrigen Coordinaten reell sein. Die Herleitung dieses Resultates ist sehr einfach und wurde mir noch wesentlich erleichtert durch die Anwendung der schon in meinen frühern Arbeiten benutzten Coordinaten des Herrn *Weierstrass*, welcher mich auch zu dieser Arbeit aufgefordert hat. Die Anwendbarkeit dieser Coordinaten beruht darauf, dass das oben für die Mechanik aufgestellte Gesetz für die rein geometrischen Eigenschaften gilt; somit war seine Gültigkeit für die Mechanik von vorn herein zu erwarten, wie auch Herr *Lipschitz* und andere aus der Form des Linienelementes auf die Form der Bewegungsgleichungen schliessen. Dass ich das Gesetz zunächst für die Dreizahl der Dimensionen

hergeleitet habe, hat seinen Grund in der Schwerfälligkeit des Ausdruckes, zu welcher man bei einer höhern Zahl von Dimensionen genöthigt ist.

Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung werden auf eine Reihe von Einzelproblemen, auf die Potentialtheorie und auf die Bewegung der festen Körper angewandt. Wenn man bedenkt, dass bei den mechanischen Untersuchungen die Parallelentheorie in der ausgiebigsten Weise benutzt wird, wird man nicht vermuthen, in den Resultaten eine so grosse Uebereinstimmung zu finden, wie sie die durchgeführten Partieen zeigen. Diese Aehnlichkeit ist aber keineswegs auf die mitgetheilten Beispiele beschränkt; sie tritt in andern Theilen, z. B. in der Hydrodynamik, vielleicht noch stärker hervor. Nur solche Aufgaben, in denen das Princip des Schwerpunkts eine wesentliche Rolle spielt, erfordern eine eigenthümliche Behandlung und sind hier ausgeschlossen. Dagegen bleibt die *Hamilton-Jacobi*sche Methode sogar in ihrer äussern Form ungeändert, wenn man annimmt, jede Function der Coordinaten werde vermittelst der zwischen ihnen bestehenden Gleichung homogen vom nullten Grade gemacht. Die Bewegung eines freien Punktes, welcher von einem festen Punkte nach einer beliebigen Function der Entfernung angezogen wird, oder welcher von zwei festen Punkten nach dem dem *Newton*schen Gesetze entsprechenden Gesetze angezogen wird, die unendlich kleine Pendelbewegung, die kürzeste Linie auf dem Schnitt beliebig vieler confocalen Gebilde zweiten Grades und einige verwandte Aufgaben bieten nicht die geringste Schwierigkeit. Einige von ihnen, bei welchen die Bewegung stets in einer zweifach oder dreifach ausgedehnten Ebene erfolgt, habe ich den beiden ersten Paragraphen beigefügt.

Auf die Theorie des Potentials hätte ich vielleicht nicht einzugehen brauchen. Nachdem Herr *Kronecker* für die *Euklid*ischen Raumformen nachgewiesen hat, dass die Potentialgesetze nur ganz specielle Fälle von sehr allgemeinen analytischen Gesetzen sind, und nachdem Herr *Schering* die Lehrsätze mitgetheilt hat, durch welche die bekannten Gesetze für unsere Raumformen übertragen werden, konnte ich nicht hoffen, der Theorie etwas Wesentliches beizufügen. Aber es schien mir angebracht, erstens die geometrische Grundlage dieser Theorie kurz zu entwickeln, zweitens einige elementare Sätze beizufügen und drittens die einfache Gestalt anzugeben, in welcher die Formeln unter Anwendung der *Weierstrass*schen Coordinaten erscheinen.

Um so genauer bin ich auf die Mechanik der starren Körper eingegangen. Ein Theil dieses Gebietes hat für drei Dimensionen schon vor längerer Zeit eine eingehende Behandlung von Herrn *Lindemann* (Math. Ann. Bd. VII.) gefunden, ein anderer Theil ist für *Euklid*ische („ebene") Raumformen von Herrn *Scheeffer* in seiner Dissertation (Berlin 1880) untersucht worden. Meine Behandlung unterscheidet sich von beiden dadurch, dass sie ein weit grösseres Gebiet umfasst, und von der letzteren auch noch dadurch, dass sie die *Riemann*sche Raumform an die Spitze stellt. Man darf ohne Uebertreibung behaupten, dass für die endlichen Raumformen speciell auf diesem Gebiete die schönsten und einfachsten Gesetze gelten, und dass die starre Bewegung für die andern Raumformen nur dann vollständig erkannt werden kann, nachdem sie für diese erfasst ist.

In einem Punkte scheinen die Resultate des Herrn *Lindemann* den meinigen zu widersprechen. Während ich bei drei Dimensionen, abgesehen von der Drehung um eine Gerade, nur eine specielle Art der unendlich kleinen Bewegung (die „zu sich reciproke" Bewegung) angebe, zählt Herr *Lindemann* deren vier auf, von denen eine zweite in der *Lobatschewsky*schen Raumform vorkommen kann. Aber Herr *Lindemann* will sich einerseits nicht auf reelle Bewegungen beschränken, andererseits will er hier die sonst gesetzte Bedingung, dass die Raumform in einem unendlich kleinen Gebiet mit der *Euklid*ischen übereinstimmt, nicht festgehalten wissen. Er geht in der Verallgemeinerung einen Schritt weiter als ich und betrachtet alle projectivischen Raumformen mit drei Dimensionen und sechsfacher Beweglichkeit. Die Behandlung derselben schliesst sich, obwohl bei mehreren von ihnen das Linienelement nicht postulirt werden kann, der analytischen Behandlung unserer Raumformen aufs natürlichste an.

Was die in der Arbeit benutzten geometrischen Sätze betrifft, so sind dieselben allerdings zum Theil früher nicht publicirt worden. Ich hoffe, dass die kurzen Andeutungen, welche darüber im Laufe der Untersuchung gegeben werden konnten, zum Verständniss genügen, bemerke aber, dass ich eine Zusammenstellung und kurze Herleitung derselben vor Kurzem bei besonderer Gelegenheit veröffentlicht habe („über die Nicht-*Euklid*ischen Raumformen von *n* Dimensionen. Braunsberg, *Huye*s Buchhandlung). Dass ich jedes Gebilde, in welches eine Gerade ganz hineinfällt, sobald sie zwei Punkte mit demselben gemeinschaftlich hat, Hauptgebilde oder Ebene nenne, habe ich bereits früher bemerkt.

§ 1.

Bewegung eines freien Punktes im Raume von drei Dimensionen.

Die Begriffe von Masse, Dichtigkeit, Geschwindigkeit und Kraft sind von der Unendlichkeit der Geraden und für unendliche Gerade vom Parallelaxiom unabhängig; sie erleiden daher in den Nicht-*Euklid*ischen Raumformen keine Aenderung. Ebenso bleibt das Beharrungsvermögen bestehen, und die Einheit der Kraft kann in der bekannten Weise auf die Einheit der Zeit und der Masse zurückgeführt werden; auch die Messung der Kraft macht theoretisch keine Schwierigkeit. Da ausserdem unendlich kleine Gebiete unserer Raumformen dieselben Eigenschaften haben, wie in der *Euklid*ischen Geometrie, so bleibt das Parallelogramm der Bewegungen und der Kräfte für ein unendlich kleines Gebiet in Gültigkeit.

Wir legen unsern Untersuchungen wieder die *Weierstrass*schen Coordinaten zu Grunde, ersetzen aber die Buchstaben t, u, v, w durch p, x, y, z, und nennen t die Zeit. Die Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit mögen der Kürze wegen mit $p', x', y', z'; p'', \dots$ bezeichnet werden. Dann gelten die Relationen:

$$(1.)\quad \begin{cases} k^2p^2+x^2+y^2+z^2 = k^2, \\ k^2pp'+xx'+yy'+zz' = 0, \\ k^2p'^2+x'^2+y'^2+z'^2+k^2pp''+xx''+yy''+zz'' = 0, \end{cases}$$

wo k^2 den reciproken Werth des Krümmungsmasses bezeichnet. Für die Geschwindigkeit v erhält man sofort die drei Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} v^2 = k^2p'^2+x'^2+y'^2+z'^2, \\ v^2+k^2pp''+xx''+yy''+zz'' = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt} = k^2p'p''+x'x''+y'y''+z'z''. \end{cases}$$

Wenn zunächst keine Kräfte auf den Punkt wirken, so muss sich der Punkt nach dem Gesagten mit gleichmässiger Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegen. Daher muss sein:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = M\frac{dp}{dt}+Np, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{dx}{dt}+Nx, \quad \dots .$$

Die zweite der Gleichungen (2.) liefert $N = -\frac{v^2}{k^2}$, und die dritte $M = 0$. Somit sind die Bewegungsgleichungen für einen Punkt, auf welchen keine Kräfte wirken:

$$(3.)\quad \frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{v^2}{k^2}p,\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{v^2}{k^2}x,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{v^2}{k^2}y,\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{v^2}{k^2}z,$$

wo v die constante Geschwindigkeit bezeichnet.

Jetzt möge auf einen ruhenden Punkt (p, x, y, z) eine Kraft R wirken. Diese Kraft stellen wir in bekannter Weise durch eine gerade Linie dar und denken uns, diese Gerade werde in der Einheit der Zeit mit gleichmässiger Geschwindigkeit durchlaufen. Die Coordinaten des Punktes, zu welchem man dann in der Zeit dt gelangt, seien $p+\frac{P}{k^2}dt$, $x+Xdt$, $y+Ydt$, $z+Zdt$. Dann liefert die zweite Gleichung (1.):

$$(4.)\quad pP+xX+yY+zZ = 0.$$

Ferner ist:

$$(5.)\quad R^2 = \frac{P^2}{k^2}+X^2+Y^2+Z^2.$$

Da für $t = 0$ die Geschwindigkeit und mit ihr die ersten Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit verschwinden, so ergiebt sich durch bekannte Erwägungen, dass für $t=0$ die Bewegungsgleichungen gelten:

$$(6.)\quad mk^2\frac{d^2p}{dt^2} = P,\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

hier bedeutet m die Masse des Punktes.

Die Grössen P, X, Y, Z können noch in anderer Weise geometrisch definirt werden. Man lege durch den Angriffspunkt der Kraft eine Ebene ε, welche auf der Richtung der Kraft senkrecht steht. Wenn dieselbe von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ resp. unter den Winkeln α, β, γ geschnitten wird, so ist $X = R\cos\alpha$, $Y = R\cos\beta$, $Z = R\cos\gamma$. Wird eine dieser Ebenen nicht geschnitten, so tritt an die Stelle des Winkels der durch k dividirte Abstand. Ist ferner e der Abstand der Ebene ε vom Anfangspunkte des Coordinatensystems, so ist $P = kR\sin\frac{e}{k}$. Demnach mögen P, X, Y, Z als die Componenten der Kraft bezeichnet werden.

Wenn mehrere Kräfte auf einen ruhenden Punkt wirken, so müssen ihre Componenten auf der linken Seite von (6.) addirt werden. Ebenso lehrt das Parallelogramm der Kräfte, dass die linken Seiten von (3.) und (6.) addirt werden müssen, wenn auf einen bewegten Punkt eine Kraft (P, X, Y, Z) wirkt. Demnach erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$(7.)\quad \begin{cases} mk^2\dfrac{d^2p}{dt^2} = P - mv^2p, \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X - \dfrac{mv^2}{k^2}x, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y - \dfrac{mv^2}{k^2}y, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z - \dfrac{mv^2}{k^2}z. \end{cases}$$

Hier stellt v die (variable) Geschwindigkeit dar. Zu den Gleichungen (4.) und (5.) tritt in Folge der letzten Gleichung (2.) noch die Relation hinzu:

$$(8.)\quad \tfrac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dt} = P\frac{dp}{dt} + X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

Wenn die Kraft R durch ein anziehendes oder abstossendes Centrum geht, so ist zuweilen eine andere Form der Bewegungsgleichungen recht bequem. Es seien p_0, x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des anziehenden Punktes, es sei e die Entfernung desselben vom angezogenen Punkte, so gelten die Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2p}{dt^2} = \dfrac{Rp_0}{k\sin\dfrac{e}{k}} - Lp, \\ m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{Rx_0}{k\sin\dfrac{e}{k}} - Lx, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{Ry_0}{k\sin\dfrac{e}{k}} - Ly, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{Rz_0}{k\sin\dfrac{e}{k}} - Lz. \end{cases}$$

Für die Function L gelten die Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}m\dfrac{d(v^2)}{dt} = \dfrac{R}{k\sin\dfrac{e}{k}}\left(k^2p_0\dfrac{dp}{dt} + x_0\dfrac{dx}{dt} + y_0\dfrac{dy}{dt} + z_0\dfrac{dz}{dt}\right), \\ mv^2 + \dfrac{Rk\cos\dfrac{e}{k}}{\sin\dfrac{e}{k}} - Lk^2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (9.) und (10.) können entweder leicht direct hergeleitet oder auf die Gleichungen (7.) und (8.) zurückgeführt werden.

Beispiel. Planetenbewegung.

Um das *Newton*sche Gesetz der Gravitation auf die Nicht-*Euklid*ischen Raumformen zu übertragen, darf man nicht von der algebraischen Form ausgehen, sondern man muss aus den geometrischen Anschauungen, welche dem Gesetze zu Grunde liegen, den entsprechenden analytischen Ausdruck herleiten. Denkt man sich um den anziehenden Punkt als Centrum mehrere Kugelflächen beschrieben und jedesmal gleiche Flächentheile mit gleichviel Masse belegt, so verhalten sich nach dem Gesetze die auf gleiche Massen ausgeübten Kräfte umgekehrt wie die Oberflächen der Kugeln. Nun ist die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r gleich $4\pi k^2 \sin^2\frac{r}{k}$. Indem wir daher die Sonne als unbeweglich annehmen, sie sowohl wie die Planeten als Punkte betrachten und von der gegenseitigen Anziehung der Planeten absehen, können wir dem Problem der Planetenbewegung folgenden Ausdruck geben:

Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft, welche nach einem festen Centrum gerichtet und umgekehrt proportional ist dem Quadrate vom Sinus des durch k dividirten Abstandes vom festen Punkte.

Wir wählen den festen Punkt zum Anfangspunkte des Coordinatensystems und, da die Bewegung offenbar in einer Ebene stattfindet, diese zur Ebene $z = 0$. Indem wir dann noch $x^2+y^2 = q^2$ setzen, nehmen die Gleichungen (9.) die Gestalt an:

$$p'' = \frac{\mu}{q^3} - pL,$$
$$x'' = -xL,$$
$$y'' = -yL.$$

Daraus ergeben sich sofort die Integrale:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} xy'-x'y = c, \\ v^2 = 2h+\dfrac{2\mu p}{q}, \end{cases}$$

wo c und h zwei Constante bedeuten. Verbinden wir hiermit die zweite Gleichung (1.) und die erste Gleichung (2.), so folgt:

$$(\beta) \qquad k^4 p'^2 = 2hq^2+2\mu pq-c^2.$$

Indem wir jetzt aus der zweiten Gleichung (10.) den Werth von L und dann aus der Gleichung $k^2p^2+q^2 = k^2$ und ihren beiden ersten Ableitungen den Werth von $\frac{d^2q}{dt^2} = q''$ berechnen, gelangen wir zu den Glei-

chungen:

$$qx''-q''x = -\frac{c^2x}{q^3} = \frac{c^2}{\mu}(px''-p''x),$$

$$qy''-q''y = -\frac{c^2y}{q^3} = \frac{c^2}{\mu}(py''-p''y).$$

Diese beiden Gleichungen führen integrirt, wenn die Integrationsconstanten mit $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{b}{\mu}$ bezeichnet werden, zu den Relationen:

$$\mu cq = c^3p-ay+bx,$$

$$0 = c^2(pq'-qp')q+ax+by.$$

Durch passende Drehung des Coordinatensystems kann man $a=0$ machen. Dann sind die beiden letzten Gleichungen:

$$(\gamma) \qquad \mu cq = c^3p+bx,$$

$$p' = \frac{by}{c^2k^2}.$$

Die Gleichung (γ) lehrt, dass das erste *Kepler*sche Gesetz ungeändert bleibt.

Statt der Grössen p und q führen wir eine neue Veränderliche r ein durch die Gleichung:

$$q = rp.$$

Dann geht die Gleichung (β) über in:

$$(\delta) \qquad dt = \frac{r\,dr}{\left(1+\frac{r^2}{k^2}\right)\sqrt{r^2\left(2h-\frac{c^2}{k^2}\right)+2\mu r-c^2}}$$

Für $y=0$ wird $\frac{dp}{dt}$ und damit auch $\frac{dr}{dt}$ gleich Null. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von r als r_1 und r_2, so ist

$$r_1+r_2 = -\frac{2\mu}{2h-\frac{c^2}{k^2}}, \quad r_1r_2 = -\frac{c^2}{2h-\frac{c^2}{k^2}},$$

also

$$\frac{\mu}{h} = -\frac{k(r_1+r_2)}{k^2-r_1r_2} = -k\,\mathrm{tg}\,\frac{2a}{k},$$

wenn der Hauptdurchmesser des Kegelschnitts gleich $2a$ gesetzt wird.

Die halbe Umlaufszeit des Planeten wird erhalten, wenn man die Gleichung (δ) zwischen den Grenzen r_1 und r_2 integrirt. Führt man diese Integration aus, so erhält man für die Umlaufszeit T die Gleichung:

$$T = \frac{\pi\mu}{(-h)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(1+\frac{\mu^2}{h^2k^2}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{\mu^2}{h^2k^2}}\right)}}$$

oder

$$(\varepsilon) \qquad T^2 = \frac{4\pi^2k^3\sin^3\frac{a}{k}\cos\frac{a}{k}}{\mu},$$

sodass das dritte *Kepler*sche Gesetz eine kleine Aenderung erleidet. Dem zweiten *Kepler*schen Gesetze muss man nach der Gleichung (α) die Form geben: Verlängert man den Radius vector über den Planeten hinaus um sich selbst, so beschreibt der doppelte Radius in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Dieser Satz, der Flächensatz, gilt offenbar von jeder freien Centralbewegung.

§ 2.

Bewegung auf einer Fläche.

Wenn ein Punkt gezwungen ist, sich auf einer Fläche ohne Reibung zu bewegen, so soll diese Bedingung bekanntlich ersetzt werden können durch eine Kraft, welche in der Richtung der Normale wirkt und deren Grösse dadurch bestimmt ist, dass der Punkt während der Bewegung auf der Fläche verbleibt.

Ist $\varphi(p, x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, so hat die Gleichung der Tangentialebene, welche im Punkte (p, x, y, z) angelegt wird, die Coefficienten:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial p} - p\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial p} + x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Diesen vier Grössen sind also die Componenten der Kraft proportional, welche der angegebenen Bedingung entspricht und welche zu den gegebenen Kräften nach dem Parallelogramm der Kräfte hinzugefügt werden muss. Indem wir die Resultante der gegebenen Kräfte mit (P, X, Y, Z) bezeichnen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$
(11.)\quad \left\{\begin{aligned}
mk^2\frac{d^2p}{dt^2} &= P-k^2Sp+M\frac{\partial\varphi}{\partial p},\\
m\frac{d^2x}{dt^2} &= X-\quad Sx+M\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y-\quad Sy+M\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z-\quad Sz+M\frac{\partial\varphi}{\partial z}.
\end{aligned}\right.
$$

Die Geschwindigkeit v wird wiederum aus der Gleichung (8.) berechnet; ferner ist $k^2S = v^2$, wenn φ in homogener Form gegeben ist, so dass mit φ auch $p\frac{\partial\varphi}{\partial p}+x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ verschwindet.

Soll der Punkt in Ruhe bleiben, so müssen die Grössen $\frac{d^2p}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ und S gleich Null sein.

Beispiel. Das Pendel.

Ein Punkt, welcher gezwungen ist, auf einer Kugelfläche zu bleiben, steht unter dem Einflusse einer constanten Kraft, welche nach einem (reellen oder imaginären) festen Punkte gerichtet ist.

Die Gleichungen werden recht einfach, wenn wir den Mittelpunkt der Kugel zum Punkte (1, 0, 0, 0) wählen und die Axe $y = z = 0$ durch den anziehenden Punkt legen, dessen andere Coordinaten p_0 und x_0 sein mögen. Die constante Kraft sei g, der Radius der Kugel l, der Abstand des anziehenden Punktes vom Mittelpunkte sei a, der veränderliche Abstand des anziehenden Punktes vom bewegten Punkte sei e. Dann gelten die Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2p}{dt^2} &= \frac{g}{k\sin\frac{e}{k}}p_0+Lp+\frac{1}{k^2}M,\\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{g}{k\sin\frac{e}{k}}x_0+Lx,\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= Ly,\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= Lz.
\end{aligned}
$$

Da p constant ist, können wir von der ersten Gleichung ganz absehen. Aus den drei letzten folgt:

$$v^2 = 2g(h-e),$$

wo h eine Constante bezeichnet. Verbinden wir hiermit den Flächensatz, so lassen sich die Quadraturen, welche das Problem in voller Allgemeinheit lösen, leicht angeben. Indessen haben nur die unendlich kleinen Bewegungen besondere Bedeutung, und für diese können wir bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung x und e als constant annehmen. Dann ist

$$e = a - l, \quad x_0 = k \sin\frac{a}{k}, \quad x = k \sin\frac{l}{k}, \quad L = -\frac{g \sin\frac{a}{k}}{k \sin\frac{a-l}{k} \sin\frac{l}{k}},$$

und dieser constante Werth von L giebt sowohl den Werth von $\frac{d^2y}{dt^2} : y$ wie von $\frac{d^2z}{dt^2} : z$ an. Hieraus ergiebt sich bekanntlich, dass die Bewegungen periodisch sind, und dass die Schwingungszeit gleich ist:

$$2\pi . \sqrt{\frac{k \sin\frac{l}{k}}{g} \frac{\sin\frac{a-l}{k}}{\sin\frac{a}{k}}}.$$

Dasselbe Resultat lässt sich für ebene Schwingungen aus der Gleichung für v^2 herleiten, indem man e und h durch den Ausschlagswinkel ausdrückt und den Ausdruck von $h - e$ nach dem *Taylor*schen Lehrsatz entwickelt. Der Isochronismus kleiner Schwingungen gilt also auch in den Nicht-*Euklid*ischen Raumformen.

§ 3.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen im dreifach ausgedehnten Raume.

Die im ersten Paragraphen hergeleiteten Bewegungsgleichungen lassen sich sofort auf beliebig viele Punkte übertragen, wenn jeder von ihnen sich frei bewegen kann. Ebenso darf man bei den Gleichungen des zweiten Paragraphen annehmen, dass die Fläche, auf welcher der Punkt verbleiben soll, selbst in beliebig vorgeschriebener Weise bewegt werde. Nehmen wir dann an, die Gleichung der Fläche

$$\varphi = 0$$

sei in den Coordinaten homogen und die Coefficienten enthielten die Zeit, so ist auch jetzt noch

$$mv^2 = k^2 S,$$

aber v selbst kann nicht in der angegebenen Weise berechnet werden. Indem man also voraussetzt, dass die zwischen den bewegten Punkten bestehenden Bedingungen sich durch eine Reihe von Gleichungen zwischen ihren Coordinaten und der Zeit ausdrücken lassen und dass diese Gleichungen die im vorigen Paragraphen angegebenen Wirkungen darstellen, erhalten wir diejenigen Bewegungsgleichungen, welche der ersten *Lagrange*schen Form entsprechen. Wenn

$$(12.)\qquad \varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \dots$$

die Bedingungsgleichungen sind, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$(13.)\qquad \begin{cases} m_\iota k^2 \dfrac{d^2 p_\iota}{dt^2} = P_\iota - k^2 S_\iota p_\iota + M\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_\iota} + N\dfrac{\partial\psi}{\partial p_\iota} + \cdots, \\ m_\iota \dfrac{d^2 x_\iota}{dt^2} = X_\iota - S_\iota x_\iota + M\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\iota} + N\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\iota} + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

wo die Gleichungen für $\frac{d^2 y_\iota}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z_\iota}{dt^2}$ den für x_ι aufgestellten entsprechen. Hier sind P_ι, X_ι, Y_ι, Z_ι gegeben als Componenten der Resultante aus sämmtlichen auf den Punkt $(p_\iota \dots)$ wirkenden Kräften; die Functionen S_ι, M, $N, \dots$ sind aus den Bedingungsgleichungen (12.) und aus der Grösse der Geschwindigkeit zu berechnen, wo wiederum die Gleichungen (1.) berücksichtigt werden müssen.

Führt man jetzt virtuelle Verrückungen ein: δp, δx, δy, δz, für welche ausser den r Gleichungen:

$$(14.)\qquad k^2 p_\iota \delta p_\iota + x_\iota \delta x_\iota + y_\iota \delta y_\iota + z_\iota \delta z_\iota = 0$$

noch die weiteren Gleichungen bestehen:

$$(15.)\qquad \Sigma\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\delta p + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\Big) = 0,$$

so leitet man aus den Gleichungen (13.) sofort das *d'Alembert*sche Princip her:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \Sigma\Big[\Big(k^2 m\dfrac{d^2 p}{dt^2} - P\Big)\delta p + \Big(m\dfrac{d^2 x}{dt^2} - X\Big)\delta x + \Big(m\dfrac{d^2 y}{dt^2} - Y\Big)\delta y \\ \qquad + \Big(m\dfrac{d^2 z}{dt^2} - Z\Big)\delta z\Big] = 0. \end{cases}$$

Um zu dem *Hamilton*schen Princip zu gelangen, definirt man die Arbeit einer Kraft für irgend eine Verrückung, gerade wie in der *Euklidi*schen Geometrie, als das Product aus der Kraft und der Verrückung in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels, und bezeichnet die Summe der

für alle Punkte gebildeten Producte als die Arbeit des Systems. Der analytische Ausdruck für die von einer Kraft geleistete Arbeit ist dann:

$$(17.)\quad P\delta p + X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

und die Gesammtarbeit U' wird durch eine über alle Punkte ausgedehnte Summation erhalten. Ebenso bezeichne man den Ausdruck

$$(18.)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = T$$

als die lebendige Kraft des Systems. Dann gilt das *Hamilton*sche Princip:

$$(19.)\quad \int(\delta T + U')dt = 0$$

in demselben Sinne und in derselben Ausdehnung wie in der *Euklid*ischen Raumform.

Dass man auch hier die Gleichungen (13.) aus (16.) und aus (19.) herleiten könne, bedarf kaum der Erwähnung.

Auf *Gauss*' Princip des kleinsten Zwanges brauchen wir nicht näher einzugehen; es genügt, auf eine Abhandlung des Herrn *Lipschitz* in diesem Journal Bd. 82 S. 316 zu verweisen.

Wenn ein Potential U existirt, d. h. wenn die Arbeit $U' = \delta U$ ist, so ist für jeden Punkt

$$(20.)\quad P = \frac{\partial U}{\partial p} - k^2 Ep,\quad X = \frac{\partial U}{\partial x} - Ex,\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} - Ey,\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} - Ez,$$

wo E vermittelst der Gleichung (4.) bestimmt wird. Macht man U homogen vom nullten Grade, so ist E gleich Null.

Aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen ergeben sich im *Euklid*ischen Raume mehrere Sätze, welche für zahlreiche Gruppen von Bewegungen gelten. Es sind dies der Satz von der lebendigen Kraft, die Sätze über den Schwerpunkt und die Flächensätze. Der erste ändert sich gar nicht in den Nicht-*Euklid*ischen Raumformen, die Schwerpunktssätze verlieren ihre Gültigkeit, dagegen erhalten wir sechs Flächensätze. Auf diese möchte ich kurz eingehen. Dieselben beruhen auf den Gleichungen:

$$(21.)\quad \Sigma\Big(p\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2p}{dt^2}\Big) = \Sigma\Big(pX - \frac{xP}{k^2}\Big),\quad \Sigma\Big(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\Big) = \Sigma(yZ - zY),\ \ldots.$$

Zu diesen sechs Gleichungen kann man vermittelst des *d'Alembert*schen Princips gelangen, wenn es möglich ist, das System längs jeder Coordinatenaxe zu verschieben und um jede zu drehen. In dieser Hinsicht gilt der Satz:

Wenn ein System um zwei gerade Linien gedreht werden kann,

welche sich schneiden, so kann es um jede durch den Schnittpunkt gehende Gerade gedreht werden, und wenn es ausserdem noch um eine Gerade gedreht werden kann, so kann es um jede Gerade gedreht und längs einer jeden verschoben werden. Wenn ein System längs zweier in einer Ebene liegenden Geraden verschoben werden kann, so kann es längs jeder Geraden verschoben werden, welche in derselben Ebene liegt, und gilt diese Möglichkeit dann noch für eine weitere Gerade, so gilt die Möglichkeit der Verschiebung und der Drehung ganz allgemein.

Hiernach lässt sich leicht übersehen, wie viele von den Flächensätzen für ein gegebenes System gelten. Was die geometrische Bedeutung anbetrifft, so ist:

$$pX - \frac{xP}{k^2} = R\cos\frac{a}{k}\cos\varphi,$$

$$yZ - zY = Rk\sin\frac{a}{k}\sin\varphi,$$

wenn R die Grösse der Kraft, φ den Winkel zwischen der Richtung der Kraft und der Axe $y = z = 0$ und a den Abstand zwischen den beiden Richtungen bedeutet. Daraus ergiebt sich, welche Bedeutung die Integrale der linken Seiten in (21.) haben.

Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (21.) ändern sich nicht, wenn jede Kraft in ihrer Richtung beliebig verschoben wird. Wenn daher keine Bedingungsgleichungen existiren, nur innere Kräfte im System wirken und jede Kraft ihrer Gegenkraft gleich ist, so sind die rechten Seiten gleich Null, und man erhält aus (21.) sechs Integralgleichungen.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht erhält man in drei verschiedenen Formen, wenn man in den Gleichungen (13.), (16.) und (19.) die Ableitungen der Coordinaten gleich Null setzt. Es ist nicht nöthig, die Gleichungen hinzuschreiben; ich möchte nur daran erinnern, dass das *Dirichlet*sche Kennzeichen für die Stabilität des Gleichgewichts auch in den Nicht-*Euklid*ischen Raumformen gilt, und dass die Bedingungen für das Gleichgewicht eines unausdehnbaren Fadens zu sehr einfachen Gleichungen führen. Wenn der Faden nicht gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben, so fällt die Richtung der Kraft in jedem Punkte in die Schmiegungsebene der Curve.

§ 4.

Bewegung in n-fach ausgedehnten Raumformen. Die *Hamilton-Jacobi*schen Methoden.

Da die in den vorangehenden Paragraphen benutzten geometrischen Begriffe von der Zahl der Dimensionen ganz unabhängig sind, so lassen sich die erhaltenen Resultate sofort auf eine beliebige Zahl von Dimensionen übertragen. Indem wir also jetzt annehmen, die Bewegung finde in einem n-fach ausgedehnten Raume mit der constanten *Riemann*schen Krümmung $\frac{1}{k^2}$ statt, bestimmen wir die Lage eines jeden Punktes durch die $n+1$ Coordinaten $x_0, x_1, \dots x_n$, zwischen denen die Gleichung besteht:

$$(22.)\qquad k^2x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2 = k^2.$$

Sind dann $X_0, X_1, \dots X_n$ die Componenten der auf den Punkt $(x_0, x_1, \dots x_n)$ wirkenden Kraft R, so ist

$$(23.)\qquad X_0x_0+X_1x_1+\cdots+X_nx_n = 0,$$
$$R^2 = \frac{X_0^2}{k^2}+X_1^2+\cdots+X_n^2.$$

Die $X_0, X_1, \dots X_n$ haben die den obigen Angaben entsprechende Bedeutung, dass X_ι gleich ist dem Producte von R in den Cosinus des Winkels, welchen die im Angriffspunkte auf der Richtung der Kraft errichtete senkrechte Ebene von $n-1$ Dimensionen mit der Ebene $x_\iota = 0$ bildet; X_0 ist wiederum gleich $kR\sin\frac{e}{k}$, wenn e den Abstand der genannten Ebene vom Punkte $(1, 0, 0, \dots 0)$ bezeichnet.

Das bewegte System möge aus r Punkten mit den Massen m_ι und den Coordinaten $x_0^{(\iota)}, x_1^{(\iota)}, \dots x_n^{(\iota)}$ bestehen; auf dieselben mögen die Kräfte $X_0^{(\iota)}, X_1^{(\iota)}, \dots X_n^{(\iota)}$ wirken und zwischen den Coordinaten mögen die Bedingungen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \dots$ bestehen. Dann sind die ersten Gleichungen von *Lagrange*, entsprechend den Gleichungen (13.):

$$(24.)\qquad \begin{cases} m_\iota k^2\dfrac{d^2x_0^{(\iota)}}{dt^2} = X_0^{(\iota)}-k^2S_\iota x_0^{(\iota)}+M\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0^{(\iota)}}+N\dfrac{\partial\psi}{\partial x_0^{(\iota)}}+\cdots, \\ m_\iota\dfrac{d^2x_\varkappa^{(\iota)}}{dt^2} = X_\varkappa^{(\iota)}-S_\iota x_\varkappa^{(\iota)}+M\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\varkappa^{(\iota)}}+N\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\varkappa^{(\iota)}}+\cdots. \end{cases}$$
$$(\iota = 1, \dots r;\ \varkappa = 1, \dots n.)$$

Die virtuellen Verrückungen $\delta x_0, \dots \delta x_n$ müssen sowohl der Gleichung (22.) als auch den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \dots$ genügen, wenn in ihnen die Zeit als constant betrachtet wird. Dann gilt das *d'Alembert*sche Princip:

$$(25.)\quad \Sigma\Big[\Big(mk^2\frac{d^2x_0}{dt^2}-X_0\Big)\delta x_0+\Big(m\frac{d^2x_1}{dt^2}-X_1\Big)\delta x_1+\cdots+\Big(m\frac{d^2x_n}{dt^2}-X_n\Big)\delta x_n\Big]=0.$$

Die Definition der Arbeit ändert sich nicht und ihr Ausdruck wird:

$$\Sigma(k^2X_0\delta x_0+X_1\delta x_1+\cdots+X_n\delta x_n).$$

Das *Hamilton*sche Princip ändert sich in keiner Weise. Wenn die Kräfte ein Potential U haben, so setze man mit *Hamilton*

$$(26.)\quad T-U=H$$

und drücke die sämmtlichen Coordinaten durch eine Reihe von unabhängigen Grössen q_ι aus, durch deren Einsetzung die Bedingungsgleichungen identisch erfüllt werden. Dann ist T eine Function von q_ι und $q'_\iota=\frac{dq_\iota}{dt}$. Man setze $\frac{\partial T}{\partial q'_\iota}=p_\iota$ und drücke H durch q_ι und p_ι aus. Jetzt sind die *Hamilton*schen Bewegungsgleichungen:

$$(27.)\quad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Es bedarf keines Beweises, dass die Methoden von *Hamilton* und *Jacobi* sich auch auf die Nicht-*Euklid*ischen Raumformen übertragen lassen. Nur die Beziehung, in denen dieselben zu den *Weierstrass*schen Coordinaten stehen, muss näher erörtert werden. Dass diese Methoden auch hier zur Lösung von Aufgaben recht geeignet sind, werden wir weiter unten an Beispielen zeigen.

Jacobi gründet die Methode seines letzten Multiplicators auf den Umstand, dass der Multiplicator des gegebenen Systems von Differentialgleichungen vor jeder Integration bestimmt werden kann. Derselbe ist gleich einer beliebigen Constanten und kann also gleich Eins gesetzt werden, sowohl wenn die Punkte frei sind, als auch wenn die *Hamilton*schen Gleichungen (27.) zu Grunde gelegt werden. Bestimmt man aber die Bewegung in einer *Euklid*ischen Raumform aus der ersten *Lagrange*schen Form und bildet man aus den Bedingungsgleichungen $\varphi=0$, $\psi=0$ die Grössen $(\varphi\varphi)$, $(\varphi\psi)$, ... nach dem Schema:

$$(\varphi\psi)=\Sigma m\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big),$$

so ist der Multiplicator des Systems gleich der Determinante:

$$(28.)\quad \begin{vmatrix}(\varphi\varphi)(\varphi\psi)\;\cdots\\(\psi\varphi)(\psi\psi)\;\cdots\\\cdots\cdots\cdots\end{vmatrix}.$$

Nun lassen sich die Untersuchungen *Jacobis*, wie in seinen Vorlesungen öfters hervorgehoben wird, auf eine *Euklid*ische Raumform von beliebig vielen Dimensionen übertragen. Unsere allgemeinen Bewegungsgleichungen können aber analytisch in folgender Weise aufgefasst werden. Einer *Euklid*ischen Raumform von $n+1$ Dimensionen werden die rechtwinkligen Coordinaten $kx_0, x_1, \dots x_n$ zu Grunde gelegt; die rechtwinkligen Componenten einer jeden Kraft seien $\frac{X_0}{k}, X_1, \dots X_n$. Ausser den Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \dots$ muss noch für die Coordinaten eines jeden Punktes die Bedingung (22.) bestehen, welche wir abgekürzt

$$\Omega_\iota = k^2$$

schreiben wollen. Unter dieser Annahme haben die Bewegungsgleichungen in der $(n+1)$-fach ausgedehnten *Euklid*ischen Raumform dieselbe Gestalt, wie in der n-fach ausgedehnten Nicht-*Euklid*ischen Raumform, deren reciprokes Krümmungsmass gleich k^2 ist. Zwar sagt die Gleichung (23.) aus, dass auch die Richtung jeder Kraft dem Gebilde $\Omega = k^2$ angehört, aber diese Bedingung ist analytisch nicht nothwendig, sondern bedingt nur die einfachsten Werthe von S_ι. Ebensowenig macht es bei der rein analytischen Behandlung einen Unterschied, dass für die *Lobatschewsky*sche Raumform k^2 negativ und jedes kx_0 und $\frac{X_0}{k}$ imaginär ist.

Dies vorausgesetzt, bedarf es keiner Erwähnung, dass der Multiplicator des Systems (27.) der *Hamilton*schen Gleichungen gleich Eins gesetzt werden darf. Geht man aber von der ersten *Lagrange*schen Form aus, so hat man die Ausdrücke

$$(\varphi\varphi),\ (\varphi\psi),\ \dots\ (\Omega_\iota\Omega_\iota),\ (\Omega_\iota\Omega_\varkappa),\ (\Omega_\iota\varphi),\ \dots$$

zu bilden nach dem Schema:

$$(29.)\quad \begin{cases} (\varphi\varphi) = \Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right), \\ (\varphi\psi) = (\psi\varphi) = \Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\frac{\partial\psi}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right), \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dann wird

$$(\Omega_\iota\Omega_\varkappa) = \begin{cases} \frac{k^2}{m_\iota} & \text{für } \iota = \varkappa, \\ 0 & \text{für } \iota \gtrless \varkappa, \end{cases}$$

und

$$(\Omega_\iota \varphi) = \frac{1}{m_\iota}\left(x_0^{(\iota)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_0^{(\iota)}}+\cdots+x_n^{(\iota)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n^{(\iota)}}\right).$$

Wenn also zunächst die Bewegung in der Nicht-*Euklid*ischen Raumform frei ist, so ist der Multiplicator des Systems der *Lagrange*schen Gleichungen gleich der Determinante aus den Grössen $(\Omega_\iota \Omega_\varkappa)$, also gleich einer Constanten, an deren Stelle auch Eins gewählt werden darf. Wenn aber noch Bedingungsgleichungen existiren, so sollen dieselben für die Coordinaten eines jeden Punktes als homogen vorausgesetzt werden. Dann verschwindet auch jedes $(\Omega_\iota \varphi)$, $(\Omega_\iota \psi)$, ..., und die Determinante aus den Grössen $(\Omega_\iota \Omega_\varkappa)$, $(\Omega_\iota \varphi)$, $(\varphi\psi)$, ... wird, abgesehen von einem constanten Factor, gleich der aus den Grössen $(\varphi\varphi)$, $(\varphi\psi)$, ... gebildeten Determinante. Bei der angenommenen Form von φ, ψ, ... ist also der Multiplicator des Systems der *Lagrange*schen Gleichungen gleich der Determinante (28.), deren Elemente nach der Vorschrift (29.) gebildet sind.

Was nun die von *Jacobi* vervollkommnete *Hamilton*sche Methode anbetrifft, so wird dieselbe in *Jacobi*s Vorlesungen über Mechanik (S. 167) für den Fall, dass die Kräftefunction die Zeit nicht explicite enthält, ungefähr in folgender Form dargestellt:

„Man drücke T und U durch die oben definirten 2μ Grössen q_i und p_i aus. Hierauf setze man in der Gleichung:

$$0 = \alpha + T - U,$$

$\frac{\partial W}{\partial q_i}$ an die Stelle von p_i, so dass diese Gleichung in eine partielle Differentialgleichung für W übergeht. Kennt man eine vollständige Lösung derselben, welche ausser der mit W additiv verbundenen Constanten die μ Constanten α_1, ... $\alpha_{\mu-1}$ enthält, so sind

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung.“

In dieser Form ist die Methode auch für die Nicht-*Euklid*ischen Raumformen zu verwenden. Es gelten somit für diese Räume auch die allgemeinen Resultate *Jacobi*s, namentlich auch die allgemeine Störungstheorie. Ich halte es jedoch für wichtig, die Form der Differentialgleichung anzugeben, wenn die *Weierstrass*schen Coordinaten x_0, x_1, ... x_n benutzt werden. Statt diese Form direct zu entwickeln, was keine Mühe machen würde, benutze ich diejenige Gleichung, welche von *Jacobi* für den Fall von Bedingungsgleichungen aufgestellt und in der ersten, seinen

Vorlesungen beigedruckten Abhandlung (S. 376—379) mitgetheilt ist. Diese gestattet uns, das Resultat sofort anzugeben.

„Wenn die Function W für die Coordinaten sämmtlicher Punkte als homogen vom nullten Grade vorausgesetzt wird, so ist sie für ein System freier Punkte durch die Differentialgleichung zu bestimmen:

$$\Sigma \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n} \right)^2 \right\} = 2U - 2\alpha. \tag{30.}$$

Wenn homogene Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... bestehen, so möge W wieder als homogen vom nullten Grade postulirt werden. Dann ist die Gleichung:

$$\Sigma \frac{1}{m} \left\{ \left(\frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_0} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_0} - \cdots \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \cdots \right)^2 + \cdots \right. \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - \cdots \right)^2 \right\} = 2U - 2\alpha,$$

wo die Coefficienten λ, μ, ... durch die Gleichungen gefunden werden:

$$\lambda(\varphi\varphi) + \mu(\varphi\psi) + \cdots = (W\varphi),$$
$$\lambda(\psi\varphi) + \mu(\psi\psi) + \cdots = (W\psi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und die $(\varphi\varphi)$, $(\varphi\psi)$, ... die oben angegebene Bedeutung haben."

Erstes Beispiel. Die kürzeste Linie auf einem beliebig ausgedehnten Gebilde.

Ein Raumgebilde sei durch r Gleichungen bestimmt $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ..., und diese mögen homogen in den Coordinaten sein. Auf diesem Gebilde bewege sich ein Punkt, ohne dass beschleunigende Kräfte ihn angreifen. Dann werden die Bewegungsgleichungen erhalten, wenn man in den Gleichungen (24.) die Grössen X_0, ... X_n gleich Null setzt. Dieselben Gleichungen ergeben sich aus den Grundsätzen der Variationsrechnung für die kürzesten Linien, sowie aus den Bedingungen des Gleichgewichts für die Form, welche ein gewichtsloser gespannter Faden auf dem Gebilde annimmt. Aus den Gleichungen schliessen wir:

„Legt man in einem beliebigen Punkte eines $(n-r)$-fach ausgedehnten Gebildes durch die (r-fach ausgedehnte) Normalebene des Gebildes und durch die Tangente an eine durch den Fusspunkt gehende kürzeste Linie eine $(r+1)$-fach ausgedehnte Ebene, so geht sie noch durch einen dritten unendlich nahen Punkt der kürzesten Linie, umfasst also die zweifach ausgedehnte Schmiegungsebene der kürzesten Linie."

Wir suchen die Gleichung der kürzesten Linie für ein beliebiges Krümmungsgebilde von quadratischen Gebilden, also für ein $(n-r)$-fach ausgedehntes Gebilde, in welchem sich r confocale quadratische Gebilde schneiden. Die Gleichungen dieser Gebilde seien:

$$\frac{k^2x_0^2}{\lambda_\iota+k^2}+\frac{x_1^2}{\lambda_\iota-\alpha_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{\lambda_\iota-\alpha_n} = 0 \qquad (\iota = 1, 2, \ldots r).$$

Dann sind die Gleichungen der kürzesten Linie:

$$\frac{1}{x_0}\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{c^2}{k^2}+\frac{M_1}{\lambda_1+k^2}+\cdots+\frac{M_r}{\lambda_r+k^2},$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{c^2}{k^2}+\frac{M_1}{\lambda_1-\alpha_1}+\cdots+\frac{M_r}{\lambda_r-\alpha_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x_n}\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{c^2}{k^2}+\frac{M_1}{\lambda_1-\alpha_n}+\cdots+\frac{M_r}{\lambda_r-\alpha_n}.$$

Wir integriren dieselben nach einer von Herrn *Weierstrass* angegebenen Methode (Berliner Monatsberichte 1861 S. 988), indem wir setzen:

$$f(\lambda) = \frac{\lambda+k^2}{k^2}(\lambda-\alpha_1)\ldots(\lambda-\alpha_n),$$

$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{k^2x_0^2}{\lambda+k^2}+\frac{x_1^2}{\lambda-\alpha_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{\lambda-\alpha_n},$$

$$\frac{\varphi_1(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{k^2x_0'^2}{\lambda+k^2}+\frac{x_1'^2}{\lambda-\alpha_1}+\cdots+\frac{x_n'^2}{\lambda-\alpha_n}.$$

Indem wir zunächst λ als von t unabhängig betrachten, beweisen wir durch Differentiation, dass

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2-\varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda)$$

von t unabhängig, also eine blosse Function von λ ist. Als solche ist sie vom $2n^{\text{ten}}$ Grade und verschwindet für $-k^2$, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, $\lambda_1, \ldots \lambda_r$, also ausserdem noch für $n-r-1$ Werthe $\beta_1, \ldots \beta_{n-r-1}$. Wir setzen demnach

$$R(\lambda) = -\frac{\lambda+k^2}{k^2}(\lambda-\alpha_1)\ldots(\lambda-\alpha_n)(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_r)(\lambda-\beta_1)\ldots(\lambda-\beta_{n-r-1})$$

und dürfen jetzt in der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2-\varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda) = c^2R(\lambda),$$

wenn wir setzen,

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt} = \frac{k^2x_0x_0'}{\lambda+k^2}+\frac{x_1x_0'}{\lambda-\alpha_1}+\cdots+\frac{x_nx_n'}{\lambda-\alpha_n},$$

auch λ als von t abhängig betrachten und demselben die $n-r$ Werthe

$\lambda_{r+1}, \ldots \lambda_n$ beilegen, für welche $\varphi(\lambda)$ ausser $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ noch verschwindet. Führen wir noch die Abkürzung ein:

$$g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_r),$$

so gehen aus den angestellten Erwägungen folgende Gleichungen hervor:

$$\frac{g(\lambda_{r+1})d\lambda_{r+1}}{\sqrt{R(\lambda_{r+1})}} + \cdots + \frac{g(\lambda_n)d\lambda_n}{\sqrt{R(\lambda_n)}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_{r+1}g(\lambda_{r+1})d\lambda_{r+1}}{\sqrt{R(\lambda_{r+1})}} + \cdots + \frac{\lambda_n g(\lambda_n)d\lambda_n}{\sqrt{R(\lambda_n)}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\lambda_{r+1}^{n-r-2}g(\lambda_{r+1})d\lambda_{r+1}}{\sqrt{R(\lambda_{r+1})}} + \cdots + \frac{\lambda_n^{n-r-2}g(\lambda_n)d\lambda_n}{\sqrt{R(\lambda_n)}} = 0,$$

$$\frac{\lambda_{r+1}^{n-r-1}g(\lambda_{r+1})d\lambda_{r+1}}{\sqrt{R(\lambda_{r+1})}} + \cdots + \frac{\lambda_n^{n-r-1}g(\lambda_n)d\lambda_n}{\sqrt{R(\lambda_n)}} = 2c\,dt.$$

Wenn speciell $r = 1$ ist, also die kürzeste Linie auf einem quadratischen Gebilde gesucht wird, so kann man zunächst die elliptischen Coordinaten und dann auch die Coordinaten $x_0, \ldots x_n$ der kürzesten Linie in der einfachsten Weise durch hyperelliptische Functionen von $n-1$ Grössen $u, u', \ldots u^{(n-2)}$ ausdrücken, von denen die erste veränderlich, die übrigen constant sind.

Auch die *Jacobi*sche Methode führt recht einfach zum Ziele. Bedeuten $\lambda_\varkappa$ die n Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{k^2x_0^2}{\lambda+k^2} - \frac{x_1^2}{\alpha_1-\lambda_1} - \cdots - \frac{x_n^2}{\alpha_n-\lambda} = 0,$$

so ist:

$$x_0^2 = \frac{(k^2+\lambda_1)\ldots(k^2+\lambda_n)}{(k^2+\alpha_1)\ldots(k^2+\alpha_n)},$$

$$x_\varkappa^2 = \frac{k^2(\alpha_\varkappa-\lambda_1)\ldots(\alpha_\varkappa-\lambda_n)}{(\alpha_\varkappa+k^2)(\alpha_\varkappa-\alpha_1)\ldots(\alpha_\varkappa-\alpha_{\varkappa-1})(\alpha_\varkappa-\alpha_{\varkappa+1})\ldots(\alpha_\varkappa-\alpha_n)}$$

und

$$4ds^2 = \Sigma N_\varkappa d\lambda_\varkappa^2,$$

wo

$$N_\varkappa = \frac{k^2(\lambda_1-\lambda_\varkappa)\ldots(\lambda_n-\lambda_\varkappa)}{(k^2+\lambda_\varkappa)(\alpha_1-\lambda_\varkappa)\ldots(\alpha_n-\lambda_\varkappa)}.$$

In unserem Falle sind $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ constant; man hat also in der Formel

$$2T = \tfrac{1}{4}N_{r+1}\lambda_{r+1}'^2 + \cdots + \tfrac{1}{4}N_n\lambda_n'^2 = c^2$$

zu setzen:

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_\nu'} = \tfrac{1}{4}N_\nu\lambda_\nu' = \frac{\partial W}{\partial \lambda_\nu},$$

und erhält die Differentialgleichung:

$$\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{1}{N_{r+1}}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_{r+1}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{N_n}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_n}\right)^2,$$

welche sich mit Benutzung der obigen Bezeichnung in folgende zerlegt:

$$\frac{f(\lambda_\nu)}{g(\lambda_\nu)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_\nu}\right)^2 = \tfrac{1}{2}c^2(\lambda_\nu-\beta_1)\ldots(\lambda_\nu-\beta_{n-r-1}) \quad \text{für} \quad \nu = r+1, \ldots n.$$

Die Differentiation von W nach den β und nach c^2 führt auf die obigen Gleichungen.

Es sei gestattet, hier die Lösung des Problems beizufügen: Ein zweifach ausgedehntes Krümmungsgebilde von quadratischen Gebilden auf die *Euklid*ische Ebene abzubilden. Nachdem diese Aufgabe gelöst ist, bietet die Abbildung auf die Ebene derselben Raumform keine Schwierigkeit.

Da in dem Ausdrucke für das Linienelement alle $d\lambda_\iota$ mit Ausnahme von $d\lambda_{n-1}$ und $d\lambda_n$ verschwinden, so ist nach der bekannten Methode zu setzen:

$$du \pm i dv = \frac{a \pm bi}{2}\left\{\sqrt{\frac{k^2(\lambda_{n-1}-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)}{(\lambda_{n-1}+k^2)(\lambda_{n-1}-\alpha_1)\ldots(\lambda_{n-1}-\alpha_n)}}\, d\lambda_{n-1} \pm i\sqrt{\frac{k^2(\lambda_n-\lambda_1)\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}{(\lambda_n+k^2)(\lambda_n-\alpha_1)\ldots(\lambda_n-\alpha_n)}}\, d\lambda_n\right\}.$$

Hier sind u und v rechtwinklige Coordinaten in der Abbildungsebene und von den Zeichen $\pm$ ist überall entweder das obere oder das untere zu wählen. Ist jetzt $\lambda_{n-1} > \lambda_n$, so wähle man $a = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{n-1}-\lambda_n}}$, $b = 0$. Dadurch wird u eine blosse Function von λ_{n-1} und v von λ_n, und ihre Darstellung ergiebt sich von selbst.

Zweites Beispiel. Ein freier Punkt wird von einem festen Punkte nach einer beliebigen Function der Entfernung angezogen.

Obwohl die Lösung sehr einfach ist, mögen einige Worte darüber gestattet sein. Will man die gewöhnlichen Methoden benutzen, so geht man etwa davon aus, dass die Bewegung in einer zweifach ausgedehnten Ebene vor sich geht, wie der Flächensatz lehrt. Wenn man die partielle Differentialgleichung integriren will, so führe man Polarcoordinaten ein (cf. *Jacobi,* l. c. S. 185 und 344). Dann zerfällt die Gleichung in eine Reihe von solchen, welche sich sofort integriren lassen. Wenn das Gesetz der Anziehung das im Beispiel zu § 1 aufgestellte ist, so kann man sehr leicht den Ort des Punktes durch seinen Abstand r vom anziehenden Punkte und durch den Abstand ϱ von einem zweiten beliebig gewählten Punkte

bestimmen. Wählt man letzteren in der Bahn des bewegten Punktes im Abstande r_0 vom Centrum, so ist

$$W = \int_{r-\varrho}^{r+\varrho} ds \sqrt{\frac{\mu}{2k} \operatorname{cotg} \frac{s+r_0}{2k} - \tfrac{1}{2}\alpha},$$

eine Gleichung, durch deren Differentiation die Bewegungsgleichungen erhalten werden.

Drittes Beispiel. In einer Raumform von n Dimensionen bewege sich ein Punkt unter dem Einfluss zweier Kräfte, welche nach zwei festen Centren gerichtet und dem Quadrate vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional sind.

Man könnte davon ausgehen, dass der bewegte Punkt in demjenigen dreifach ausgedehnten Hauptgebilde verbleibt, welches durch die beiden anziehenden Punkte und die anfängliche Richtung des bewegten Punktes bestimmt wird. Indessen würde sich hierdurch die Rechnung nicht vereinfachen. Wir nehmen daher auf die Anfangsrichtung des Punktes keine Rücksicht und legen von den Ebenen eines *Weierstrass*schen Coordinatensystems die Ebenen $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ... $x_n = 0$ durch die Gerade, welche die anziehenden Punkte verbindet, und geben dem Gebilde $x_1 = 0$ eine symmetrische Lage zu diesen beiden Punkten. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_2 &= s.\cos\varphi_1, \\ x_3 &= s.\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n &= s\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}, \end{aligned}$$

so dass ist

$$x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2 = s^2, \quad k^2x_0^2+x_1^2+s^2 = k^2.$$

Dadurch geht die Differentialgleichung (30.) über in

$$\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}\right)^2+\frac{1}{s^2\sin^2\varphi_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_2}\right)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{s^2\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-2}}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_{n-2}}\right)^2 = 2U+2h,$$

welche sich sofort in die beiden Gleichungen zerlegt:

$$\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)^2 = 2U+2h-\frac{2\varrho}{s^2},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_2}\right)^2+\cdots = 2\varrho,$$

wo ϱ eine willkürliche Constante bezeichnet. Die erste Gleichung drücke

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k}\operatorname{cotg}\frac{r}{k} + \frac{m_1}{k}\operatorname{cotg}\frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_1) + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_1) - \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_2) + \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k} \operatorname{cotg} \frac{r}{k} + \frac{m_1}{k} \operatorname{cotg} \frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2} \right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} - \frac{1}{2}\varrho\,\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2}\varrho\,\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1} \sin^{n-1}\frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss'* Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k} \operatorname{cotg} \frac{r}{k} + \frac{m_1}{k} \operatorname{cotg} \frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2} \right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} - \frac{1}{2}\varrho \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2}\varrho \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt (n—1)-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1} \sin^{n-1} \frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k} \operatorname{cotg} \frac{r}{k} + \frac{m_1}{k} \operatorname{cotg} \frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2} \right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} - \frac{1}{2}\varrho\,\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2}\varrho\,\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1} \sin^{n-1} \frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k}\operatorname{cotg}\frac{r}{k} + \frac{m_1}{k}\operatorname{cotg}\frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} - \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k} \operatorname{cotg} \frac{r}{k} + \frac{m_1}{k} \operatorname{cotg} \frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)} \left\{ \frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2} \right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} - \frac{1}{2}\varrho \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2}\varrho \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^4}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1} \sin^{n-1} \frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k}\cot g\frac{r}{k} + \frac{m_1}{k}\cot g\frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_1) + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\lambda_1-\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2-\lambda_2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_1) - \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_2) + \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k}\operatorname{cotg}\frac{r}{k} + \frac{m_1}{k}\operatorname{cotg}\frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_1)+(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\lambda_1-\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2-\lambda_2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1-\frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_1)-\frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)}+\mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2-\frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}}(\alpha_1-\lambda_2)+\frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)}+\mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

ich durch elliptische Coordinaten aus, für welche die Brennpunkte mit den anziehenden Punkten zusammenfallen. Wie die linke Seite dadurch umgeformt wird, ergiebt sich aus dem ersten Beispiele. Auf der rechten Seite ist zu setzen

$$U = \frac{m}{k}\operatorname{cotg}\frac{r}{k} + \frac{m_1}{k}\operatorname{cotg}\frac{r_1}{k},$$

wo r und r_1 die Abstände von den Brennpunkten bedeuten. Man erhält durch leichte Umformungen:

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} + (m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

und findet

$$\frac{1}{s^2} = \frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{\frac{1}{\lambda_1-\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2-\lambda_2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 - \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)} - \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\lambda_1-\alpha_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_1}{k^2}(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_1)}}$$

$$+ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 - \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2}\varrho\frac{(k^2+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}{k^2(\alpha_2-\lambda_2)} + \mu}{\frac{k^2+\lambda_2}{k^2}(\alpha_1-\lambda_2)(\alpha_2-\lambda_2)}}$$

$$+ F(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}),$$

wo μ eine Constante bezeichnet und wo F eine blosse Function von $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-2}$ ist, welche sich aus der zweiten Differentialgleichung durch weitere Zerfällung sofort ergiebt.

§ 5.

Erweiterung des *Newton*schen Gesetzes.

In einer Raumform von n Dimensionen denken wir uns um einen anziehenden Massenpunkt als Mittelpunkt $(n-1)$-fach ausgedehnte Kugelflächen beschrieben. Wenn auf Theilen dieser Flächen Masse ausgebreitet ist, so muss nach den Anschauungen, welche dem *Newton*schen Gesetze zu Grunde liegen, die vom Mittelpunkte ausgeübte Anziehung den Massen direct und den Flächen umgekehrt proportional sein. Nun ist die Oberfläche eines solchen Gebildes für den Radius r gleich $\varpi k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}$, wo ϖ in bekannter Weise durch n und π ausgedrückt wird. Als Erweiterung

des *Newton*schen Gesetzes der Attraction für eine Raumform von n Dimensionen betrachten wir demnach eine Anziehung, welche der Masse direct und der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz vom Sinus des durch k dividirten Abstandes umgekehrt proportional ist.

Der Kürze wegen möge es in diesem Paragraphen gestattet sein, einen von einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelfläche begrenzten Theil des Raumes als Kugel, die Grenzfläche kurz als Kugelfläche und den von zwei concentrischen $(n-1)$-fach ausgedehnten Kugelflächen begrenzten Raum als Kugelschale zu bezeichnen. Entsprechendes möge beim Worte Ellipsoid gelten.

Dem in *Gauss*' Werken Band V S. 9 aufgestellten Theorem IV. entspricht das Folgende:

„Bezeichnet dS ein Element eines $(n-1)$-fach ausgedehnten und einen endlichen Raum einfach einschliessenden Gebildes S, P einen Punkt dieses Elementes, M einen festen Punkt des Raumes, r den Abstand MP, u den Winkel zwischen MP und der innern Normale von dS, so ist das über das ganze Gebilde S ausgebreitete Integral

$$\int \frac{dS.\cos u}{k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k}} = 0 \quad \text{oder} \quad = \varpi \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}\varpi,$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb von S oder auf S selbst liegt."

Zum Beweise beschreibe man um M eine Kugelfläche mit dem unendlich kleinen Radius ν und ziehe nach den sämmtlichen Punkten auf der Grenze von dS von M aus gerade Linien. Wenn das so entstandene Kegelgebilde auf der Kugelfläche den Theil $\nu^{n-1}d\sigma$ ausschneidet, so ist

$$\frac{dS.\cos u}{d\sigma} = k^{n-1}\sin^{n-1}\frac{r}{k},$$

woraus der Satz sofort folgt.

Dieser Satz führt auf die Erweiterung eines andern von *Gauss* bewiesenen Satzes (Werke V. S. 224); die Erweiterung ist von Herrn *Schering* in der Abhandlung: „Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten *Gauss*ischen und *Riemann*schen Räumen" (Göttinger Nachrichten 1873 S. 154) als Lehrsatz III. aufgestellt.

Die Anziehung, welche eine unendlich dünne homogene Kugelschale ausübt, ist für einen Innenpunkt gleich Null, für einen Aussenpunkt so gross, als ob die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Daraus ergiebt sich sofort die Anziehung, welche eine beliebige homogene Kugelschale oder Vollkugel auf irgend einen Punkt ausübt.

Ist φ eine homogene Function zweiten Grades der Coordinaten und hat Ω die oben angegebene Bedeutung, so sollen die durch die Gleichungen:

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi + \frac{\lambda}{k^2}\Omega = 0$$

dargestellten Gebilde als ähnliche concentrische Gebilde bezeichnet werden. Der Raum, welcher zwischen den beiden ähnlichen unendlich nahen Ellipsoiden

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n} - x_0^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_1^2}{\alpha_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n} - x_0^2 = 2d\tau$$

enthalten ist, möge gleichmässig mit Masse erfüllt sein. Die so vertheilte Masse übt auf jeden Innenpunkt keine Anziehung aus. Wir fügen einen Beweis bei, welcher gestattet, mehrere wichtige Formeln für das Ellipsoid mitzutheilen.

Die Dichtigkeit im Punkte x ist proportional $\psi d\tau$, wo ψ den Sinus des Abstandes der Tangentialebene vom Mittelpunkte bedeutet und sich aus der Formel ergiebt:

$$\frac{1}{\psi^2} = \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n^2} + \frac{x_0^2}{k^2}.$$

Der angezogene Punkt ξ habe vom Punkte x die Entfernung r und die Gerade r bilde mit der Normale in x den Winkel φ; dann ist

$$\cos\varphi = \frac{x_0\xi_0 - \frac{x_1\xi_1}{\alpha_1} - \cdots - \frac{x_n\xi_n}{\alpha_n}}{\psi k \sin\frac{r}{k}}.$$

Beschreibt man um ξ eine Kugel mit dem unendlich kleinen Radius ν, und bestimmt ein den Punkt x enthaltendes Element dS des anziehenden Körpers auf der Kugel das Element $\nu^{n-1}d\sigma$, so ist die von dS ausgeübte Anziehung proportional

$$\frac{d\sigma . d\tau}{\psi . \cos\varphi} = \frac{k \sin\frac{r}{k}\, d\sigma . d\tau}{x_0\xi_0 - \frac{x_1\xi_1}{\alpha_1} - \cdots - \frac{x_n\xi_n}{\alpha_n}}.$$

Wie sich aus den Polareigenschaften des Ellipsoids ergiebt, bleibt dieser Ausdruck ungeändert, wenn man statt dS dasjenige Element nimmt, dessen Grenze mit ξ verbunden zu demselben Kegelgebilde führt. Damit ist der Satz bewiesen.

Indem man auf zwei confocalen Ellipsoiden solche Punkte einander

zuordnet, welche in $n-1$ elliptischen Coordinaten übereinstimmen, gelangt man in bekannter Weise zu dem Satze: „Zu einer unendlich dünnen, von ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schicht ist jedes confocale Ellipsoid eine Niveaufläche“.

Die Form, welche das Potential für das angegebene Gesetz annimmt, und die wichtigsten Gesetze über dasselbe sind bereits von Herrn *Schering* in der erwähnten Arbeit angegeben (Göttinger Nachr. 1873 S. 149 bis 159). Die Function $w_n(r)$ des Abstandes r, mit welcher das Product der Massen multiplicirt wird, ist für ein gerades und ungerades n verschieden, und zwar ist für ein ungerades n:

$$(31.)\qquad w_n(r) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{r}{k}}{(n-2)k^{n-2}} \sum_0^{\frac{n-3}{2}}{}_\nu \frac{2\nu+2}{2\nu+1}\cdot\frac{2\nu+4}{2\nu+3}\cdots\frac{n-5}{n-6}\,\frac{n-3}{n-4}\,\frac{1}{\sin^{2\nu}\frac{r}{k}},$$

dagegen für ein gerades $n>2$:

$$(32.)\quad \left\{\begin{aligned} w_n(r) &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdots\frac{n-3}{n-4}\,\frac{\log\left(\frac{1}{2k}\operatorname{cotg}\frac{r}{2k}\right)}{(n-2)k^{n-2}}\\ &+\frac{\cos\frac{r}{k}}{(n-2)k^{n-2}\sin^2\frac{r}{k}}\sum_0^{\frac{n-4}{2}}{}_\nu\frac{2\nu+3}{2\nu+2}\,\frac{2\nu+5}{2\nu+4}\cdots\frac{n-3}{n-4}\,\frac{1}{\sin^{2\nu}\frac{r}{k}}.\end{aligned}\right.$$

Damit die Potentialfunction

$$(33.)\qquad V = \int dm\, w(r)$$

auch im Aeussern die bekannten Eigenschaften beibehalte, stellen wir sie als homogene Function nullten Grades der Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_n$ dar und lassen auch für die Bildung der zweiten partiellen Differentialquotienten die ersten Differentialquotienten als Function $(-1)^{\text{ten}}$ Grades der Coordinaten bestehen. Dann sind die Componenten der Kraft:

$$X_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0},\quad X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1},\quad \ldots\quad X_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Wenn dann in jedem unendlich kleinen Raumtheile nur unendlich wenig Masse enthalten ist, so ändern sich das Potential und die ersten Ableitungen stetig im ganzen Raume. Dagegen ist der nach der obigen Vorschrift gebildete Differentialausdruck:

$$(34.)\qquad \triangle V = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = -\varpi\varrho,$$

Ist φ eine homogene Function zweiten Grades der Coordinaten und hat Ω die oben angegebene Bedeutung, so sollen die durch die Gleichungen:

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi + \frac{\lambda}{k^2}\Omega = 0$$

dargestellten Gebilde als ähnliche concentrische Gebilde bezeichnet werden. Der Raum, welcher zwischen den beiden ähnlichen unendlich nahen Ellipsoiden

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n} - x_0^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_1^2}{\alpha_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n} - x_0^2 = 2d\tau$$

enthalten ist, möge gleichmässig mit Masse erfüllt sein. Die so vertheilte Masse übt auf jeden Innenpunkt keine Anziehung aus. Wir fügen einen Beweis bei, welcher gestattet, mehrere wichtige Formeln für das Ellipsoid mitzutheilen.

Die Dichtigkeit im Punkte x ist proportional $\psi d\tau$, wo ψ den Sinus des Abstandes der Tangentialebene vom Mittelpunkte bedeutet und sich aus der Formel ergiebt:

$$\frac{1}{\psi^2} = \frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n^2} + \frac{x_0^2}{k^2}.$$

Der angezogene Punkt ξ habe vom Punkte x die Entfernung r und die Gerade r bilde mit der Normale in x den Winkel φ; dann ist

$$\cos\varphi = \frac{x_0\xi_0 - \frac{x_1\xi_1}{\alpha_1} - \cdots - \frac{x_n\xi_n}{\alpha_n}}{\psi k \sin\frac{r}{k}}.$$

Beschreibt man um ξ eine Kugel mit dem unendlich kleinen Radius ν, und bestimmt ein den Punkt x enthaltendes Element dS des anziehenden Körpers auf der Kugel das Element $\nu^{n-1}d\sigma$, so ist die von dS ausgeübte Anziehung proportional

$$\frac{d\sigma . d\tau}{\psi . \cos\varphi} = \frac{k\sin\frac{r}{k}\, d\sigma . d\tau}{x_0\xi_0 - \frac{x_1\xi_1}{\alpha_1} - \cdots - \frac{x_n\xi_n}{\alpha_n}}.$$

Wie sich aus den Polareigenschaften des Ellipsoids ergiebt, bleibt dieser Ausdruck ungeändert, wenn man statt dS dasjenige Element nimmt, dessen Grenze mit ξ verbunden zu demselben Kegelgebilde führt. Damit ist der Satz bewiesen.

Indem man auf zwei confocalen Ellipsoiden solche Punkte einander

zuordnet, welche in $n-1$ elliptischen Coordinaten übereinstimmen, gelangt man in bekannter Weise zu dem Satze: „Zu einer unendlich dünnen, von ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schicht ist jedes confocale Ellipsoid eine Niveaufläche".

Die Form, welche das Potential für das angegebene Gesetz annimmt, und die wichtigsten Gesetze über dasselbe sind bereits von Herrn *Schering* in der erwähnten Arbeit angegeben (Göttinger Nachr. 1873 S. 149 bis 159). Die Function $w_n(r)$ des Abstandes r, mit welcher das Product der Massen multiplicirt wird, ist für ein gerades und ungerades n verschieden, und zwar ist für ein ungerades n:

$$(31.)\qquad w_n(r) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{r}{k}}{(n-2)k^{n-2}} \sum_{0}^{\frac{n-3}{2}} {}_\nu \frac{2\nu+2}{2\nu+1} \cdot \frac{2\nu+4}{2\nu+3} \cdots \frac{n-5}{n-6} \frac{n-3}{n-4} \frac{1}{\sin^{2\nu}\frac{r}{k}},$$

dagegen für ein gerades $n>2$:

$$(32.)\qquad \begin{cases} w_n(r) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-3}{n-4}\,\frac{\log\left(\frac{1}{2k}\operatorname{cotg}\frac{r}{2k}\right)}{(n-2)k^{n-2}} \\ + \frac{\cos\frac{r}{k}}{(n-2)k^{n-2}\sin^2\frac{r}{k}} \sum_{0}^{\frac{n-4}{2}} {}_\nu \frac{2\nu+3}{2\nu+2} \frac{2\nu+5}{2\nu+4} \cdots \frac{n-3}{n-4} \frac{1}{\sin^{2\nu}\frac{r}{k}}. \end{cases}$$

Damit die Potentialfunction

$$(33.)\qquad V = \int dm\, w(r)$$

auch im Aeussern die bekannten Eigenschaften beibehalte, stellen wir sie als homogene Function nullten Grades der Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_n$ dar und lassen auch für die Bildung der zweiten partiellen Differentialquotienten die ersten Differentialquotienten als Function $(-1)^{\text{ten}}$ Grades der Coordinaten bestehen. Dann sind die Componenten der Kraft:

$$X_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \ldots \quad X_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Wenn dann in jedem unendlich kleinen Raumtheile nur unendlich wenig Masse enthalten ist, so ändern sich das Potential und die ersten Ableitungen stetig im ganzen Raume. Dagegen ist der nach der obigen Vorschrift gebildete Differentialausdruck:

$$(34.)\qquad \triangle V = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = -\varpi\varrho,$$

Die Determinante der Form

$$k^2 a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + (a_{01} + a_{10}) x_0 x_1 + \cdots - \sigma \Omega$$

ist das Quadrat der Determinante $E(\omega)$, wenn man $\frac{1+\omega^2}{\omega} = 2\sigma$ setzt. (Man multiplicire, um dieses Product zu erhalten, $E(\omega)$ mit einer Determinante, welche sich von ihr dadurch unterscheidet, dass statt der Elemente $a_{0\iota}$ die Elemente $a_{\iota 0}$ den Divisor k^2 haben).

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

„Alle Punkte, welche in ihrer zweiten Lage von der ersten eine vorgeschriebene Entfernung haben, liegen auf einem quadratischen Gebilde: jedes derartige Gebilde ist in seiner zweiten Lage in Deckung mit seiner Anfangslage. Alle derartigen Gebilde gehören einem Aehnlichkeitsbüschel an. Dieser Büschel ist von derselben Art, wie derjenige, welcher dieselbe Eigenschaft bei einer unendlich kleinen Bewegung hat."

Jetzt bestimme man diejenige unendlich kleine Bewegung, deren charakteristischer Büschel mit dem eben gefundenen identisch ist, und lasse bei mehrfachen Wurzeln von $E(\omega) = 0$ auch die in sich bewegten Geraden zusammenfallen; den Kegelgebilden des Büschels gebe man diejenige Geschwindigkeit ϱ, welche dem für dasselbe Kegelgebilde geltenden Werthe von σ nach der Gleichung $\sigma = \cos\frac{\varrho}{k}$ entspricht. Die Fortsetzung dieser Bewegung führt den Körper in die verlangte Endlage.

Um die Differentialgleichungen der Bewegung eines festen Körpers, auf welchen beliebige Kräfte wirken, zu erhalten, bilde man die Componenten der Bewegung nach den im Körper festen Axen, indem man setzt:

$$(46.)\qquad \begin{cases} a_{00} da_{0\iota} + a_{10} da_{1\iota} + \cdots + a_{n0} da_{n\iota} = \mu_{0\iota} dt, \\ \frac{a_{0\iota} da_{0\varkappa}}{k^2} + a_{1\iota} da_{1\varkappa} + \cdots + a_{n\iota} da_{n\varkappa} = \mu_{\iota\varkappa} dt; \end{cases}$$

dann ist

$$\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\alpha} = 0.$$

Das Trägheitsmoment ist eine homogene Function zweiten Grades der Grössen $\mu_{\alpha\beta}$ und wird erhalten, wenn man die beiden Seiten der Gleichung (38.) mit $\frac{1}{2}m$ multiplicirt und über alle Punkte des Körpers summirt. Haben noch die Grössen $M_{\alpha\beta}$ die am Ende von § 6 angegebene Bedeutung, so kann man die gesuchten Gleichungen in der Form schreiben:

$$(47.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial T}{\partial \mu_{\varkappa 0}} = \sum\limits_{\iota}\left\{\dfrac{\partial T}{\partial \mu_{\iota 0}}\,\mu_{\iota\varkappa} - \dfrac{1}{k^2}\,\mu_{\iota 0}\,\dfrac{\partial T}{\partial \mu_{\iota\varkappa}}\right\} + M_{\varkappa 0}, \\ \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial T}{\partial \mu_{\iota\varkappa}} = \sum\limits_{\alpha}\left\{\mu_{\alpha\iota}\,\dfrac{\partial T}{\partial \mu_{\alpha\varkappa}} - \mu_{\alpha\varkappa}\,\dfrac{\partial T}{\partial \mu_{\alpha\iota}}\right\} + M_{\iota\varkappa}, \end{cases}$$

wo die Summation nach α auch den Index Null umfasst.

Mag der Körper frei sein oder mögen gewisse Gleichungen seine Beweglichkeit einschränken, immer lassen sich lineare, von einander unabhängige Functionen der μ finden, in welchen sich T als Summe von Quadraten darstellen lässt. Wir betrachten zunächst den Fall, dass keine Bedingungsgleichung existirt. Dann wählen wir die Hauptträgheitsebenen zu den mit dem Körper verbundenen Coordinatenebenen. Da alsdann die lebendige Kraft T in der Form erscheint:

$$2T = \mu_{01}^2\left(A_0 + \frac{A_1}{k^2}\right) + \cdots + \mu_{0n}^2\left(A_0 + \frac{A_n}{k^2}\right) + \mu_{12}^2(A_1 + A_2) + \cdots + \mu_{n-1,n}^2(A_{n-1} + A_n),$$

so nehmen die Bewegungsgleichungen jetzt die einfache Form an:

$$(48.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mu_{\varkappa 0}}{dt} = \dfrac{k^2 A_0 - A_1}{k^2 A_0 + A_1}\,(\mu_{01}\mu_{\varkappa 1} + \mu_{02}\mu_{\varkappa 2} + \cdots + \mu_{0n}\mu_{\varkappa n}) + \dfrac{k^2 M_{\varkappa 0}}{k^2 A_0 + A_1}. \\ \dfrac{d\mu_{\iota\varkappa}}{dt} = \dfrac{A_\varkappa - A_\iota}{A_\varkappa + A_\iota}\left(\dfrac{\mu_{\iota 0}\mu_{\varkappa 0}}{k^2} + \mu_{\iota 1}\mu_{\varkappa 1} + \cdots + \mu_{\iota n}\mu_{\varkappa n}\right) + \dfrac{M_{\iota\varkappa}}{A_\varkappa + A_\iota}. \end{cases}$$

Die Integration dieser Gleichungen, selbst für den Fall, dass sämmtliche Grössen $M_{\alpha\beta}$ verschwinden, ist mir bisher nicht gelungen. Eine Reihe von Integralen ergiebt sich mit ziemlich grosser Leichtigkeit, und bei besondern Werthen für einzelne Integrationsconstanten ist auch die vollständige Lösung nicht schwierig. Bei dem Charakter dieser Arbeit glaube ich jedoch auf diese analytischen Untersuchungen nicht näher eingehen zu dürfen, und will daher an dieser Stelle aus unsern Gleichungen nur diejenigen Folgerungen ziehen, welche aus ihnen ohne jede Rechnung erkannt werden. Wir fragen daher zunächst: Wann wird die Bewegung gleichförmig sein, d. h. wie muss die Anfangsbewegung eines festen Körpers beschaffen sein, damit sie der Körper, sich selbst überlassen, beibehält?

Dies wird eintreten, wenn die ersten Ableitungen der Grössen $\mu_{\alpha\beta}$ für $t = 0$ verschwinden, da alsdann die höhern Ableitungen, welche homogene lineare Functionen der ersten Ableitungen sind, ebenfalls sämmtlich verschwinden. Indem wir für den Fall, dass die Hauptträgheitsmomente sämmtlich unter einander verschieden sind, die rechten Seiten der Gleichungen (48.) mit der Gleichung (38.) vergleichen, gelangen wir zu dem Satze:

„Für eine gegebene Anfangsbewegung eines festen Körpers, dessen Hauptträgheitsmomente sämmtlich unter einander verschieden sind, suche man diejenigen Geraden, welche in sich verschoben werden; geht dann durch die sämmtlichen Trägheitsmittelpunkte des Körpers, soweit sie nicht etwa in Ruhe bleiben, eine in sich verschobene Gerade, so setzt der Körper die Anfangsbewegung so lange fort, bis äussere Kräfte eine andere Bewegung hervorrufen."

Man kann dem Satze auch folgende Form geben:

„Man bestimme den durch die Anfangslage bestimmten Büschel ähnlicher Gebilde; wenn die Trägheitsmittelpunkte zugleich Mittelpunkte für diese Gebilde sind, so behält der Körper die Anfangsbewegung bei."

Es scheint mir passend, diesen Satz auf die verschiedenen Arten von unendlich kleinen Bewegungen, welche im vorletzten Paragraphen aufgezählt sind, anzuwenden; dadurch erhalten wir folgende Sätze:

In einer Raumform von einer ungeraden Zahl von Dimensionen kann bei dem Wegfall äusserer Kräfte nur dann die allgemeine Bewegung eines festen Körpers, dessen Hauptträgheitsmomente ungleich sind, sich gleichförmig fortsetzen, wenn jede der $\frac{n+1}{2}$ in sich verschobenen Geraden zwei Trägheitsmittelpunkte enthält.

Hat die Gleichung $\triangle = 0$ keine verschwindende Wurzel, zerfallen aber die Wurzeln in Gruppen von α, β ... gleichen (etwa ϱ_α^2, ϱ_β^2 ...), so muss diejenige Ebene, welche sich mit der Geschwindigkeit ϱ_α bewegt, 2α Trägheitsmittelpunkte enthalten, ebenso dasjenige Hauptgebilde, dessen sämmtliche Punkte die Geschwindigkeit ϱ_β haben, 2β dieser Punkte enthalten u. s. w.

Ist die Bewegung zu sich reciprok, so wird sie sich beim Wegfall äusserer Kräfte gleichmässig fortsetzen.

Soll in einer Raumform von einer geraden Zahl von Dimensionen die Bewegung sich gleichförmig fortsetzen, so muss ein Trägheitsmittelpunkt in Ruhe bleiben; diese Bedingung ist nur dann auch hinreichend, wenn die Bewegung, mit welcher die absolute Polarebene des ruhenden Punktes in sich verschoben wird, zu sich reciprok ist, oder anders gefasst, wenn durch jeden Punkt des Körpers eine zweifach ausgedehnte Ebene geht, welche in sich bewegt wird.

Damit in einer paarig ausgedehnten Raumform die allgemeinste Be-

wegung sich fortsetze, müssen die n bewegten Trägheitsmittelpunkte zu je zweien auf einer in sich verschobenen Geraden liegen.

Hat überhaupt bei einer Bewegung das ruhende Gebilde r Dimensionen und hat die Gleichung $\triangle = 0$ in ϱ^2 ausserdem die Gruppen von $\gamma, \delta \ldots$ unter sich gleichen Wurzeln, so müssen $r+1$ Trägheitsmittelpunkte in Ruhe bleiben, 2γ sich geradlinig mit der Geschwindigkeit ϱ_γ, 2δ ebenso mit der Geschwindigkeit ϱ_δ u. s. w. bewegen.

Es verdient beachtet zu werden, dass die zu sich reciproke Bewegung, obwohl sie allgemeiner ist als die Parallelverschiebung des *Euklidi*schen Raumes, doch alle charakteristischen Eigenschaften derselben besitzt. Ebenso mache ich darauf aufmerksam, dass es in einer *Lobatschewsky*schen Raumform und ebenso (bis auf eine nachher zu erwähnende Ausnahme) in einem paarig ausgedehnten endlichen Raume keine Bewegung giebt, welche sich bei völlig beliebiger Lage des festen Körpers gleichmässig fortsetzt, wie es die Parallelverschiebung eines jeden *Euklid*ischen Raumes und die zu sich reciproke Bewegung einer unpaarig ausgedehnten endlichen Raumform thut.

Wenn die Hauptträgheitsmomente in Gruppen von ε, $\zeta \ldots$ unter einander gleichen zerfallen, so giebt es eine $(\varepsilon - 1)$-fach ausgedehnte Ebene, von welcher jeder Punkt Trägheitsmittelpunkt ist u. s. w. Soll dann in der Gleichung (48.) jedes $\frac{d\mu_{\iota\varkappa}}{dt}$ für $t = 0$ verschwinden, so brauchen bei ungleichem α und β in der Gleichung (38.) die Coefficienten derjenigen $x_\alpha x_\beta$ nicht zu verschwinden, für welche A_α und A_β derselben Gruppe angehören. Es zerfällt daher die rechte Seite der Gleichung (38.) in Gruppen, von denen eine nur ε, eine zweite nur ζ Variable enthält u. s. w. Die Bedingung, dass eine Bewegung sich fortsetzt, besteht also jetzt darin, dass in jedem $(\varepsilon - 1)$-fach ausgedehnten Hauptgebilde, welches lauter Trägheitsmittelpunkte enthält, ε Punkte liegen, welche in gerader Linie bewegt werden.

Wenn endlich alle Trägheitsmomente einander gleich sind, so setzt sich jede Bewegung des Körpers so lange fort, bis äussere Kräfte eine andere Bewegung hervorrufen.

Nachdem so diese Frage ganz erschöpfend behandelt ist, wollen wir einige Bedingungen erwähnen, unter denen alle Fortsetzungen einer Bewegung derselben (linearen) Gruppe angehören. In dieser Beziehung gilt der allgemeine Satz:

„Wenn die Anfangsbewegung eines Körpers eine Ebene (Gerade

oder Punkt) in sich verschiebt, gegen welche das imaginäre Bild des Körpers (und damit jedes zu ihm confocale Gebilde) symmetrisch liegt, so wird die Fortsetzung dieser Bewegung beim Wegfall äusserer Kräfte dieselbe Eigenschaft beibehalten."

Bleibt also bei Beginn der Bewegung ein Trägheitsmittelpunkt in Ruhe, so besteht die Bewegung fortwährend in einer Drehung um denselben Punkt; wenn eine Gerade, welche zwei Trägheitsmittelpunkte verbindet, bei Beginn der Bewegung in sich verschoben wird, so bleibt diese Gerade fortwährend in Deckung mit ihrer Anfangslage.

Mit dem letzten Satze steht folgende Bemerkung in engem Zusammenhange. Wenn der Zwang, der auf einen Körper wirkt, darin besteht, eine der bezeichneten Ebenen in Deckung mit ihrer Anfangslage zu halten, so ist beim Wegfall äusserer Kräfte die Bewegung genau dieselbe, als ob der Körper frei ist und nur die Anfangsbewegung der gestellten Bedingung genügt.

Unter den verschiedenen Arten einer nicht völlig freien Bewegung ist die Drehung um einen Punkt am wichtigsten. Wir wählen den festen Punkt zum Anfangspunkte (1, 0, ... 0) eines *Weierstrass*schen Coordinatensystems und die stationären Trägheitsebenen des Punktes zu den Ebenen $x_1, \dots x_n$. Dann nehmen die Bewegungen die Form (48.) an, wenn man in ihnen jedes $\mu_{\varkappa 0}$ und $M_{\varkappa 0}$ gleich Null setzt und unter den $A_\varkappa$ nicht mehr die Hauptträgheitsmomente, sondern die stationären Werthe versteht, welche das Moment für die durch den festen Punkt gelegten Ebenen annimmt. Auch bei beliebigem anderm Zwange behalten die Bewegungsgleichungen diese Form bei, nur ändern die $\mu_{\alpha\beta}$ und $M_{\alpha\beta}$ in etwa ihre Bedeutung.

Braunsberg, im Januar 1884.

Bemerkung. Erst nachträglich ist es mir möglich geworden, die Arbeit von *Clifford* einzusehen: On the free motion under no forces of a rigid system in an *n*-fold Homaloid (Proc. of the London Math. Soc. VIII. 67). Darin sind bereits für einen in einer endlichen Raumform bewegten Körper, auf den keine äussern Kräfte wirken, die Gleichungen (48.) entwickelt. Wenn *Clifford* aber behauptet, diese Gleichungen könnten durch einfache ϑ-Quotienten integrirt werden, so hat er zu bemerken vergessen, dass dieser Lösung, welche nur bei bestimmten Anfangsbedingungen möglich ist, der Charakter der Allgemeinheit fehlt.

Braunsberg, Oct. 1884.

Flächenerzeugung durch Krümmungslinien.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

1. Wenn eine Curve C sich so bewegt, dass sie in jeder ihrer Lagen Krümmungslinie der erzeugten Fläche bleibt, so bilden die Normalen der Fläche längs dieser Linie in jeder Lage derselben eine abwickelbare Fläche, deren Wendecurve eine Evolute der Curve C ist. Diese von den Normalen der erzeugten Fläche umhüllte Evolute der Curve C kann entweder in allen Lagen eine und dieselbe sein, oder sich bei der Bewegung ändern. Dieses Letztere kann nur dann geschehen, wenn die erzeugende Curve C eine ebene Curve ist.

2. Bleibt eine Raumcurve Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche, so bleibt sowohl ihre Evolute, welche von den Normalen der Fläche umhüllt wird, als die Axe der Bewegung immer eine und dieselbe; auch hat die Winkelgeschwindigkeit zur Gleitungsgeschwindigkeit ein constantes Verhältniss. Dabei bewegt sich die Evolute so, dass die Geschwindigkeit jedes ihrer Punkte senkrecht auf derselben steht. (Eine Ausnahme findet nur für die sphärischen Curven statt; denn sie bleiben bei einer beliebigen Bewegung auf der Kugeloberfläche Krümmungslinien derselben.) Die Gleichungen dieser Evolute sind folgende:

$$x = \sqrt{\varphi'(\theta)}.\cos\theta,\quad y = \sqrt{\varphi'(\theta)}.\sin\theta,\quad cz = C.\varphi(\theta),$$

(wo $\varphi(\theta)$ eine beliebige Function von θ ist und $\varphi'(\theta)$ ihre Ableitung), und jede Evolvente dieser Curve hat die Eigenschaft, bei ihrer Bewegung um die z-Axe Krümmungslinie der von ihr beschriebenen Fläche zu bleiben. Die so erzeugte Fläche hat die Gleichungen:

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = kv+f(u).$$

3. Die ebene Curve

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} x = b\cdot\dfrac{\cos^2\varphi}{1-B\cos\varphi}+b\sin\varphi\displaystyle\int\dfrac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-B\cos\varphi)^2}, \\ y = b\cdot\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{1-B\cos\varphi}+b(B-\cos\varphi)\displaystyle\int\dfrac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-B\cos\varphi)^2} \end{cases}$$

bleibt Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche, wenn sich ihre Ebene so bewegt, dass die x-Axe Hauptnormale einer Curve bleibt und die y-Axe Tangente derselben Curve. Diese Leitcurve ist nur der Bedingung unterworfen, dass ihr erster Krümmungsradius constant sein soll. Die Fläche, welche bei dieser Bewegung der Curve (α.) erzeugt wird, hat folgende Gleichungen:

$$X = b\int\frac{\alpha}{\varrho}ds + \varrho\alpha' x + \alpha y, \quad Y = b\int\frac{\beta}{\varrho}ds + \varrho\beta' x + \beta y, \quad Z = b\int\frac{\gamma}{\varrho}ds + \varrho\gamma' x + \gamma y,$$

worin α, β, γ Functionen einer Variablen s sind, welche nur die Bedingung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ zu erfüllen brauchen; α', β', γ' sind ihre Ableitungen; auch ist zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{1}{\varrho^2} = \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2;$$

x und y haben die Werthe (α.).

4. Die Curve

$$x = \frac{1}{B}(a\sin\varphi - b\cos\varphi), \quad y = -\frac{1}{B}\left(a\cos\varphi + b\sin\varphi - b\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

erzeugt eine Fläche, auf der sie stets Krümmungslinie bleibt, wenn eine durch die y-Axe hindurchgehende und auf der Ebene der Curve senkrecht stehende Ebene eine beliebige Cylinderfläche stets berührt. Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ um die Berührungslinie soll mit der Gleitungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ durch die Gleichung verbunden sein $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{b}{a}\cdot R$, wo R den Abstand der Berührungslinie von der y-Axe bedeutet; auch soll die Berührungslinie parallel zur y-Axe bleiben.

5. Jede ebene Curve bleibt Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche, wenn ihre Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

6. Der Kreis hat noch die in Rede stehende Eigenschaft, wenn eine durch seinen Mittelpunkt gehende und mit ihm fest verbundene Ebene, auf der er senkrecht steht, auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

I.

Man denke sich eine Curve in einer beliebigen Bewegung. Die Geschwindigkeiten ihrer Punkte sind jeden Augenblick identisch mit denen, welche die Bewegung um eine gewisse Axe (die sogenannte momentane Axe) hervorbringen würde. Seien also:

$$(1.)\qquad \frac{x-P}{p} = \frac{y-Q}{q} = \frac{z-R}{r}$$

die Gleichungen der momentanen Axe zur Zeit t in Bezug auf ein rechtwinkliges mit der Curve fest verbundenes Coordinatensystem; dann sind die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes (xyz) der Curve folgenden Grössen proportional

$$\begin{vmatrix} y-Q & z-R \\ q & r \end{vmatrix} d\omega + p d\varphi, \quad \begin{vmatrix} z-R & x-P \\ r & p \end{vmatrix} d\omega + q d\varphi, \quad \begin{vmatrix} x-P & y-Q \\ p & q \end{vmatrix} d\omega + r d\varphi;$$

$d\omega$ und $d\varphi$ sind die Elemente der Bewegung um die momentane Axe während des Zeitmomentes dt.

Soll nun die Curve Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche bleiben, so müssen die Geschwindigkeiten ihrer Punkte senkrecht auf den Tangenten einer von ihren Evoluten stehen, nämlich die Geschwindigkeit jedes Punktes muss senkrecht stehen auf der durch denselben Punkt hindurchgehenden Tangente der Evolute. Bezeichnet man also mit $x'y'z'$ die Coordinaten des Punktes der Evolute, welcher dem Punkte xyz der Curve entspricht, so findet man folgende Bedingungsgleichung

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ x'-x & y'-y & z'-z \end{vmatrix} d\omega + \{p(x'-x)+q(y'-y)+r(z'-z)\} d\varphi = 0.$$

Nun sind aber alle Evoluten einer Curve C enthalten in den Formeln*)

$$(3.)\qquad \begin{cases} x' = x+\varrho\xi+\varrho\lambda.\operatorname{tang}(\tau+g), \quad y' = y+\varrho\eta+\varrho\mu.\operatorname{tang}(\tau+g), \\ \qquad z' = z+\varrho\zeta+\varrho\nu.\operatorname{tang}(\tau+g), \end{cases}$$

wo jede Evolute einem bestimmten Werthe von g entspricht. ($\tau+g$ ist der Winkel, welchen die Tangente der Evolute mit der Hauptnormale der Curve bildet.) Folglich wird die Bedingungsgleichung

$$(4.)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + (p\xi+q\eta+r\zeta)\frac{d\varphi}{d\omega} \\ & + \left\{ \begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} + (p\lambda+q\mu+r\nu)\frac{d\varphi}{d\omega} \right\} \operatorname{tang}(\tau+g) = 0. \end{aligned} \right.$$

*) *Serret*, Cours de calcul différentiel p. 436. Deuxième édition.

In dieser Gleichung sind die Grössen p, q, r, P, Q, R und $\frac{d\varphi}{d\omega}$ Functionen der Zeit t, während die $x\ y\ z,\ \xi\ \eta\ \zeta,\ \lambda\ \mu\ \nu$ und τ nur von dem Arcus s der Curve abhängen. Was die Grösse g angeht, so ist sie eine Constante, wenn die von den Normalen der Fläche umhüllte Evolute immer dieselbe bleibt; sie hängt aber von der Zeit ab, wenn sich die Evolute mit der Zeit ändert. Ich werde nun zeigen, dass, wenn g von der Zeit abhängt, die erzeugende Curve eine ebene Curve ist. Zu dem Ende sei zur Abkürzung gesetzt

$$\begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + (\Sigma p\alpha)\frac{d\varphi}{d\omega} = A, \quad \begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + (\Sigma p\xi)\frac{d\varphi}{d\omega} = B,$$

$$\begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} + (\Sigma p\lambda)\frac{d\varphi}{d\omega} = C, \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}(\tau+g) = v.$$

Dann erhalten wir, indem wir nach s differentiiren (mit Hülfe der bekannten Formeln)

$$\frac{\partial A}{\partial s} = Bm, \qquad m = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -Am - Cn - \Sigma p\lambda, \qquad n = \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{T},$$

$$\frac{\partial C}{\partial s} = Bn + \Sigma p\xi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = n(1+v^2),$$

$$\frac{\partial(\Sigma p\alpha)}{\partial s} = m\Sigma p\xi, \quad \frac{\partial(\Sigma p\xi)}{\partial s} = -m\Sigma p\alpha - n\Sigma p\lambda, \quad \frac{\partial(\Sigma p\lambda)}{\partial s} = n\Sigma p\xi.$$

Nun nimmt die Bedingungsgleichung (4.) folgende Form an

$$(5.)\qquad B+v.C = 0,$$

und wenn wir sie wiederholt nach s differentiiren und die vorhergehenden Gleichungen beachten, so bekommen wir folgende Gleichungen

$$(6.)\qquad Am+\Sigma p\lambda - v.\Sigma p\xi = 0,$$

$$(7.)\qquad \varrho A(m'-mnv)+Bm+v.\Sigma p\alpha = 0,$$

$$(8.)\qquad \varrho^2 A(mm''-m'^2-m^2n^2-mv(mn)')+2B(m'-mnv)-Cmn+n.\Sigma p\alpha = 0.$$

Diese Gleichungen sind von der Form

$$A(av+f)+B(bv+h)+C(cv+k)$$
$$+(Hv+\Theta)\Sigma p\alpha+(Mv+N)\Sigma p\lambda+(Ev+Z)\Sigma p\xi = 0,$$

wo die Coefficienten $a, b, c, f, h, k, H, \Theta, M, N, E, Z$ unabhängig von der Zeit sind. Wenn man nun diese Gleichung nach s differentiirt, so findet man folgende

$$A(a_1 v+f_1)+B(b_1 v+h_1)+C(c_1 v+k_1)$$
$$+(H_1 v+\Theta_1)\Sigma p\alpha+(M_1 v+N_1)\Sigma p\lambda+(E_1 v+Z_1)\Sigma p\xi = 0.$$

Hierin werden die neuen Coefficienten $a_1, f_1, \dots$ durch die alten $a, f, \dots$ mittelst folgender Gleichungen gegeben:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{cases} a_1 = a'-mb-nf, & b_1 = b'+(c-h)n+am, & c_1 = c'-(b+k)n, \\ f_1 = f'+na-mh, & h_1 = h'+mf+n(b+k), & k_1 = k'+(c-h)n. \end{cases}$$

$$(\varepsilon'.)\quad \begin{cases} H_1 = H'-n\Theta-mE, & \Theta_1 = \Theta'+nH-mZ, \\ M_1 = M'-b-nN-nE, & N_1 = N'+nM-h-nZ, \\ E_1 = E'+c+mH+nM-nZ, & Z_1 = Z'+k+m\Theta+nN+nE. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass man aus der Gleichung (8.) durch Differentiirung erhalten wird

$$(9.)\quad A(a_1 v+f_1)+B(b_1 v+h_1)+C(c_1 v+k_1)+(H_1 v+\Theta_1)\Sigma p\alpha+(M_1 v+N_1)\Sigma p\lambda = 0,$$

$$(10.)\quad \begin{cases} A(a_2 v+f_2)+B(b_2 v+h_2)+C(c_2 v+k_2)+(H_2 v+\Theta_2)\Sigma p\alpha+(M_2 v+N_2)\Sigma p\lambda \\ \qquad +(E_2 v+Z_2)\Sigma p\xi = 0, \end{cases}$$

und die Coefficienten $a_1, f_1, \dots a_2, f_2, \dots$ können durch die Formeln $(\varepsilon.)$ und $(\varepsilon'.)$ gefunden werden.

Eliminirt man nun aus den sechs Gleichungen (5.) ... (10.) die sechs Grössen $A, B, C, \Sigma p\alpha, \Sigma p\lambda, \Sigma p\xi$, so findet man für v die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & v & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 1 & -v \\ \varrho(m'-mnv) & m & 0 & v & 0 & 0 \\ av+f & bv+h & -mn & n & 0 & 0 \\ a_1 v+f_1 & b_1 v+h_1 & c_1 v+k_1 & H_1 v+\Theta_1 & M_1 v+N_1 & 0 \\ a_2 v+f_2 & b_2 v+h_2 & c_2 v+k_2 & H_2 v+\Theta_2 & M_2 v+N_2 & E_2 v+Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist eine ganze Function von v vom sechsten Grade, und da die Gleichung für alle Werthe von s und t gelten soll, und die Variable t nur in v enthalten ist (wenn g keine Constante ist, sondern sich mit der Zeit ändert), so folgt, dass sie für alle Werthe

von s und v gelten muss. Wenn man also die Determinante nach v entwickelt und in die Form bringt

$$P_0 + P_1 v + P_2 v^2 + P_3 v^3 + \cdots + P_6 v^6,$$

so müssen alle Coefficienten P_0, P_1, P_2, ... gleich Null sein.

Nun ist aber (wie man leicht aus der Determinante findet, indem man $v = 0$ setzt)

$$P_0 = n\varrho m' Z_2 (k_1 + m\Theta_1),$$

oder, wenn man nach den Formeln (ε.) und (ε'.) die Coefficienten Z_2, k_1, Θ_1 berechnet,

$$P_0 = 15\varrho (nm')^3.$$

Folglich ist $nm' = 0$, d. i., entweder $n = 0$, oder $m' = 0$. Ist $n = 0$, so ist die Curve ebene Curve; sei also $m' = 0$, d. h. $\varrho = \text{constant}$; dann geben die Formeln (ε.) und (ε'.)

$$h = 0, \quad N_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad f = -n^2, \quad f_1 = -3nn', \quad \Theta_1 = n', \quad h_1 = -4mn^2,$$

und der Coefficient P_4 wird aus der Determinante berechnet

$$P_4 = \begin{vmatrix} c_1 + mH_1 & M_1 \\ k_2 + m\Theta_2 & N_2 + E_2 \end{vmatrix} . n'.$$

Man findet nun aus den Formeln (ε.) und (ε'.)

$$c_1 = 3mn^2, \quad M_1 = 2mn, \quad k_2 = 7mn^3 - mn'', \quad N_2 = 6mn^2,$$
$$H_1 = -n^2, \quad \Theta_2 = n'' - n^3, \quad E_2 = 4mn^2;$$

folglich ist

$$P_4 = \begin{vmatrix} 2mn^2 & 2mn \\ 6mn^3 & 10mn^2 \end{vmatrix} . n' = 8m^2.n^4.n',$$

und da $P_4 = 0$ sein soll, so folgt $n' = 0$; dann sind m und n beide constant, und die Gleichungen (7.) und (8.) geben durch Elimination von $\Sigma p\alpha$

$$-2Bmnv^2 = 0,$$

woraus $B = 0$ folgt. Diese Gleichung aber drückt weiter nichts aus, als dass die Geschwindigkeit jedes Punktes der Curve senkrecht auf der Hauptnormale steht. Es bleibt also die Curve auch eine geodätische Linie der von ihr erzeugten Fläche; sie ist aber auch eine Krümmungslinie, folglich ist sie eine ebene Curve. Wir schliessen also: *Wenn sich die Evolute mit der Zeit ändert, muss die Curve eine ebene Curve sein.*

Wir haben danach zwei Fälle zu betrachten: im ersten Falle wird die erzeugende Linie als Raumcurve vorausgesetzt, im zweiten wird sie als ebene Curve angenommen.

II.

Raumcurven als Krümmungslinien.

Die Bedingungsgleichung (2.), welche die erzeugende Curve erfüllen soll, wird jetzt einfacher, wenn man sie auf die Evolute überträgt, welche von den Normalen der Fläche umhüllt wird, da jetzt diese Evolute bei der Bewegung unverändert bleibt (der Fall, wo diese Evolute ein Punkt ist, wird nachher betrachtet). In der That, wenn man die Coordinaten $x\ y\ z$ der Curve durch die zur Evolute gehörenden Grössen ausdrückt,

$$x = x'-s'.\alpha', \quad y = y'-s'.\beta', \quad z = z'-s'.\gamma'$$

und ihre Werthe in die Gleichung (2.) setzt, so findet man

$$(11.)\qquad \begin{vmatrix} x'-P & y'-Q & z'-R \\ p & q & r \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + (\Sigma p\alpha')\frac{d\varphi}{d\omega} = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Geschwindigkeit jedes Punktes $x'\ y'\ z'$ der Evolute senkrecht auf derselben stehen soll. Auch ist diese Bedingung hinreichend; denn, wenn sich die Evolute auf die genannte Weise bewegt, d. h., wenn die Gleichung (11.) gilt, so lässt sich leicht für die Curve die Gleichung (2.) herleiten. Die Gleichung (11.) lässt sich in die Form setzen

$$(12.)\qquad \Pi\alpha'+K\beta'+\Lambda\gamma'+p(z'\beta'-y'\gamma')+q(x'\gamma'-z'\alpha')+r(y'\alpha'-x'\beta') = 0,$$

wenn gesetzt wird

$$\Pi = p\frac{d\varphi}{d\omega}-(Qr-Rq), \quad K = q\frac{d\varphi}{d\omega}-(Rp-Pr), \quad \Lambda = r\frac{d\varphi}{d\omega}-(Pq-Qp).$$

In dieser Gleichung sind die Grössen Π, K, Λ, p, q, r Functionen der Zeit t, während die α', β', γ', $z'\beta'-y'\gamma'$, $x'\gamma'-z'\alpha'$, $y'\alpha'-x'\beta'$ nur von dem Arcus s' der Curve abhängen; eine solche Gleichung zwischen Functionen zweier Variabeln, die unabhängig von einander sind, zerspaltet sich bekanntlich in i ($i \leqq 6$) lineare und homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten zwischen den Grössen Π, K, Λ, p, q, r und in $6-i$ ähnliche Gleichungen zwischen den α', β', γ', $z'\beta'-y'\gamma'$, $x'\gamma'-z'\alpha'$, $y'\alpha'-x'\beta'$.

Die Anzahl i kann nicht gleich 6 sein; denn dann müssten alle Π, K, Λ, p, q, r gleich 0 sein, was unmöglich ist.

$$i = 5.$$

Wenn $i = 5$ ist, so lassen sich dieselben Grössen mit Hülfe von einer unter ihnen ausdrücken, die ich mit g bezeichne; es ist also

$$\Pi = ag, \quad K = bg, \quad \Lambda = cg, \quad p = Ag, \quad q = Bg, \quad r = Cg,$$

und die Bedingungsgleichung (12.) wird alsdann

$$(13.) \qquad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ A & B & C \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0,$$

welches die Differentialgleichung der Evolute ist.

Da aber die Verhältnisse der Grössen p, q, r constant sind, so folgt, dass die Richtung der momentanen Axe eine und dieselbe bleibt, und wenn man die z-Axe parallel mit dieser Richtung nimmt, so ist $p = 0$, $q = 0$, mithin auch $\frac{\Pi}{r} = \text{const.}$, $\frac{K}{r} = \text{const.}$ und $\frac{\Lambda}{r}$, d. i., $\frac{d\varphi}{d\omega} = \text{const.}$; folglich sind auch die P, Q, R constant. Hieraus folgt, dass in diesem Falle die Axe der Bewegung unverändert bleibt, und die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ zur Gleitungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ein constantes Verhältniss hat.

Nimmt man die Axe der Bewegung als z-Axe, so wird

$$p = 0, \quad q = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0;$$

also ist $A = 0$, $B = 0$, $a = 0$, $b = 0$, und die Gleichung der Evolute wird

$$C(\beta' x' - \alpha' y') = c\gamma' \quad \text{oder} \quad C(x'dy' - y'dx') = cdz'.$$

Man führe nun Polarcoordinaten ein $x' = \mathfrak{r}\cos\theta$, $y' = \mathfrak{r}\sin\theta$; dann wird die Gleichung der Evolute:

$$C\mathfrak{r}^2 d\theta = cdz', \quad \text{also} \quad cz' = C\int \mathfrak{r}^2 d\theta,$$

und da $\mathfrak{r}$ eine beliebige Function von θ sein kann, so kann man setzen $\mathfrak{r} = \sqrt{\varphi'(\theta)}$; dann findet man folgende Gleichungen der Evolute

$$x' = \sqrt{\varphi'(\theta)}.\cos\theta, \quad y' = \sqrt{\varphi'(\theta)}.\sin\theta, \quad cz' = C.\varphi(\theta).$$

Jede Evolute dieser Curve hat die betrachtete Eigenschaft, wenn sie sich um die z-Axe bewegt.

Um jetzt die Gleichungen der erzeugten Fläche zu finden, bemerken wir, dass bei der Bewegung alle Punkte der erzeugenden Curve Schraubenlinien mit gleicher Höhe erzeugen; folglich ist in jedem Punkte der Fläche

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = kv + f(u).$$

Da die Ausdrücke E, F, G, D, D', D'' dieser Fläche (nach der *Gauss*ischen Bezeichnung) nur von u abhängen, so ist die Differentialgleichung ihrer Krümmungslinien von der Form:

$$Adu^2+2Bdudv+Cdv^2 = 0,$$

worin A, B, C Functionen von u sind; also sind die Gleichungen dieser Linien von der Form $v=\sigma_1(u)+C$, $v=\sigma_2(u)+C'$, woraus erhellt, dass jede Reihe der Krümmungslinien verschiedene Lagen einer und derselben Curve darstellt.

$$i = 4.$$

Wenn die Grössen Π, K, Λ, p, q, r der Gleichung (12.) durch vier lineare und homogene Gleichungen verbunden sind, so kann man sie mit Hülfe von zweien unter ihnen ausdrücken, die ich mit g und h bezeichne; es ist also

$$\Pi = ag+a'h, \quad K = bg+b'h, \quad \Lambda = cg+c'h,$$
$$p = Ag+A'h, \quad q = Bg+B'h, \quad r = Cg+C'h,$$

und die Bedingungsgleichung zerspaltet sich in die zwei folgenden

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ A & B & C \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + \Sigma a\alpha' = 0, \quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ A' & B' & C' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + \Sigma a'\alpha' = 0,$$

woraus folgt

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ A & B & C \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} + \Sigma a\xi' = 0, \quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ A' & B' & C' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} + \Sigma a'\xi' = 0.$$

Entwickelt man nun diese Gleichungen nach den Cosinus, so nehmen sie folgende Form an

$$\alpha'\varphi_1+\beta'\varphi_2+\gamma'\varphi_3 = 0, \quad \alpha'f_1+\beta'f_2+\gamma'f_3 = 0$$

und

$$\xi'\varphi_1+\eta'\varphi_2+\zeta'\varphi_3 = 0, \quad \xi'f_1+\eta'f_2+\zeta'f_3 = 0,$$

und die Cosinus $\alpha'\beta'\gamma'$, so wie auch die $\xi'\eta'\zeta'$, werden den drei Grössen

$$\begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ f_3 & f_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}$$

proportional sein. Wären nun diese Grössen von Null verschieden, so würden die Cosinus $\alpha'\beta'\gamma'$ gleich den $\xi'\eta'\zeta'$ sein, d. i., die Tangente würde mit der Hauptnormale zusammenfallen, was unmöglich ist; es muss also sein

$$\begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ f_3 & f_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich in die Form bringen

$$(14.)\quad \begin{cases} \Delta.x+x(\Sigma aA'-\Sigma a'A)+A(\Sigma a'x)-A'(\Sigma ax)+bc'-b'c = 0,\\ \Delta.y+y(\Sigma aA'-\Sigma a'A)+B(\Sigma a'x)-B'(\Sigma ax)+ca'-c'a = 0,\\ \Delta.z+z(\Sigma aA'-\Sigma a'A)+C(\Sigma a'x)-C'(\Sigma ax)+ab'-a'b = 0,\end{cases}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ A & B & C\\ A' & B' & C'\end{vmatrix} = \Delta.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\begin{vmatrix} B & C\\ B' & C'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} C & A\\ C' & A'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} A & B\\ A' & B'\end{vmatrix}$$

und addirt, so findet man die Gleichung

$$\Delta^2+\Delta(\Sigma aA'-\Sigma a'A)+\Sigma(bc'-b'c)(BC'-B'C) = 0.$$

Hieraus sieht man, dass Δ eine Constante ist; es sind also die Gleichungen (14.) vom ersten Grade; folglich ist die Evolute eine gerade Linie. Da aber keine Curve eine geradlinige Evolute haben kann, so folgt, dass die Aufgabe in diesem Falle keine Lösung hat.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass sich die Evolute der erzeugenden Raumcurve, welche von den Normalen der Fläche umhüllt wird, nicht in einen Punkt zusammenzieht (was nur bei sphärischen Curven geschehen kann), sondern eine Linie ist. Diesen besonderen Fall werden wir jetzt betrachten.

Da die Normalen der erzeugten Fläche, in jeder Lage der Raumcurve, alle in diesem Punkte zusammentreffen müssen, so haben wir jetzt die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix} + (px+qy+rz)\frac{d\varphi}{d\omega} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} P & Q & R\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix} = (px+qy+rz)\frac{d\varphi}{d\omega},$$

das ist

$$x\left(Qr-Rq-p\frac{d\varphi}{d\omega}\right)+y\left(Rp-Pr-q\frac{d\varphi}{d\omega}\right)+z\left(Pq-Qp-r\frac{d\varphi}{d\omega}\right) = 0.$$

Wenn nun zwischen den xyz keine lineare Gleichung stattfindet, so müssen ihre Coefficienten alle gleich Null sein, d. h.

$$(\varepsilon.)\qquad Qr-Rq = p\frac{d\varphi}{d\omega},\quad Rp-Pr = q\frac{d\varphi}{d\omega},\quad Pq-Qp = r\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Daraus folgt $(p^2+q^2+r^2)\frac{d\varphi}{d\omega} = 0$, also $d\varphi = 0$, d. i., es muss bei der Bewegung keine Gleitung stattfinden, sondern bloss Drehung um die momentane Axe. Die Gleichungen der momentanen Axe werden jetzt wegen der Gleichungen (ε.)

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

d. h. die momentane Axe geht immer durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und da nur Drehung stattfindet, so bleibt dieser Punkt unbewegt. Die Bewegung ist also der Art, dass die sphärische Curve sich auf der Oberfläche der Kugel bewegt; es ist aber jede Curve auf einer Kugeloberfläche Krümmungslinie dieser Fläche.

Wenn zwischen den xyz eine lineare homogene Gleichung existirt, so ist die Curve eine ebene Curve und zwar ein Kreis. Den Fall der ebenen Curven werden wir jetzt betrachten.

III.

Ebene Curven als Krümmungslinien.

Nimmt man die Ebene der Curve als xy-Ebene, so ist $z = 0$, $\gamma = 0$, $\zeta = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, und die Gleichung (4.), welche ausdrückt, dass die Curve in allen ihren Lagen Krümmungslinie der erzeugten Fläche ist, wird jetzt

$$(15.)\qquad \Pi\xi+K\eta+(\Lambda-py+qx)v+r(y\xi-x\eta) = 0.$$

Damit nun diese Gleichungen für alle Werthe von s und t gelten, muss zwischen den Π, K, Λv, pv, qv, r eine gewisse Anzahl i linearer homogener Gleichungen stattfinden. Ist diese Anzahl i gleich 6, so müssen alle sechs Π, K, ... gleich Null sein, und da p, q, r nicht alle drei zugleich verschwinden, so muss sein

$$\Pi = 0,\quad K = 0,\quad v = 0,\quad r = 0,$$

d. i.

$$p\frac{d\varphi}{d\omega}+Rq=0,\quad q\frac{d\varphi}{d\omega}-Rp=0,\quad \text{also}\quad d\varphi=0,\quad R=0.$$

Die momentane Axe liegt also stets auf der Ebene der Curve, und es findet keine Gleitung statt; daraus schliessen wir, dass die Ebene der Curve auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt. Die erzeugende Curve bleibt alsdann beliebig.

$$i = 5.$$

Wenn die Anzahl i gleich 5 ist, so lassen sich die Grössen Π, K, ... mit Hülfe von einer unter ihnen ausdrücken, die ich mit g bezeichne. Sei also

$$(\theta.)\qquad \Pi=ag,\quad K=bg,\quad \Delta v=cg,\quad pv=Ag,\quad qv=Bg,\quad r=Cg.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (15.) ein, so kommt

$$(16.)\qquad a\xi+b\eta+c-Ay+Bx+C(y\xi-x\eta) = 0,$$

welches die Differentialgleichung der erzeugenden Curve ist. Um diese Gleichung zu integriren, bezeichnen wir mit φ den Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der x-Axe einschliesst: dann ist

$$\alpha=\frac{dx}{ds}=\cos\varphi,\quad \beta=\frac{dy}{ds}=\sin\varphi,\quad \xi=-\sin\varphi,\quad \eta=\cos\varphi,$$

und die Gleichung der Curve nimmt folgende Form an

$$(17.)\qquad -a\sin\varphi+b\cos\varphi+c-Ay+Bx-C(y\sin\varphi+x\cos\varphi) = 0.$$

Nun ist aber für eine beliebige ebene Curve

$$(18.)\qquad \begin{cases} x\sin\varphi-y\cos\varphi=\delta,\quad x\cos\varphi+y\sin\varphi=\delta', \\ \text{oder} \\ x=\delta\sin\varphi+\delta'\cos\varphi,\quad y=\delta'\sin\varphi-\delta\cos\varphi, \end{cases}$$

(wo δ den Abstand des Anfangspunktes von der Tangente bedeutet), und wenn man diese Werthe der x, y in die Gleichung (17.) einsetzt, so findet man für δ folgende Differentialgleichung

$$\delta'(-A\sin\varphi+B\cos\varphi-C)+\delta(A\cos\varphi+B\sin\varphi) = a\sin\varphi-b\cos\varphi-c.$$

Es sei nun zur Abkürzung gesetzt

$$l=A\sin\varphi-B\cos\varphi+C,\quad m=a\sin\varphi-b\cos\varphi-c,$$

dann kommt

$$l\delta'-l'\delta = -m,$$

folglich ist

$$\delta' = -l\int\frac{m}{l^2}\,d\varphi,$$

also ist

$$
(19.)\quad \begin{cases} x = -(A+C\sin\varphi)\int\frac{a\sin\varphi-b\cos\varphi-c}{(A\sin\varphi-B\cos\varphi+C)^2}d\varphi-\cos\varphi\frac{a\sin\varphi-b\cos\varphi-c}{A\sin\varphi-B\cos\varphi+C}, \\ y = \quad (C\cos\varphi-B)\int\frac{a\sin\varphi-b\cos\varphi-c}{(A\sin\varphi-B\cos\varphi+C)^2}d\varphi-\sin\varphi\frac{a\sin\varphi-b\cos\varphi-c}{A\sin\varphi-B\cos\varphi+C}, \end{cases}
$$

womit die Curve bestimmt ist.

Berechnet man noch den Krümmungsradius ϱ der Curve, nach der bekannten Formel

$$\varrho = \delta+\delta'',$$

so findet man

$$\varrho = -\frac{m'}{l}-C\int\frac{md\varphi}{l^2},$$

also

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{-Cm-lm''+m'l'}{l^2},$$

welche Gleichung die Form annimmt

$$(20.)\quad \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{Aa+Bb+Cc}{l^2}.$$

Um jetzt die Bewegung der Curve (19.) zu bestimmen, bei der sie Krümmungslinie der erzeugten Fläche bleibt, bemerken wir, dass bei einer beliebigen Bewegung der Curve und des mit ihr fest verbundenen Axensystemes ox, oy, oz, folgende Bewegungsgleichungen (in Bezug auf ein festes Coordinatensystem OX, OY, OZ) gelten:

$$(21.)\quad X = x_0+\xi x+\alpha y+\lambda z,\quad Y = y_0+\eta x+\beta y+\mu z,\quad Z = z_0+\zeta x+\gamma y+\nu z.$$

Hierin sind die $\xi\ \eta\ \zeta$, $\alpha\ \beta\ \gamma$, $\lambda\ \mu\ \nu$ die Richtungscosinus der Axen ox, oy, oz zur Zeit t in Bezug auf das feste System OX, OY, OZ; x_0, y_0, z_0 sind die Coordinaten des Anfangspunktes o und X, Y, Z die Coordinaten des Punktes xyz ebenfalls zur Zeit t.

Die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes xyz, in Bezug auf die Axen ox, oy, oz, sind bekanntlich folgende (mit dt multiplicirt)

$$\Sigma\xi dx_0-ry+qz,\quad \Sigma\alpha dx_0-pz+rx,\quad \Sigma\lambda dx_0-qx+py,$$

wo

$$p = \Sigma\alpha d\lambda,\quad q = \Sigma\lambda d\xi,\quad r = \Sigma\xi d\alpha.$$

Da die Grössen p, q, r den Cosinus der momentanen Axe (in Bezug auf die Axen ox, oy, oz) proportional sind, so kann man sie als identisch mit den gleichnamigen Grössen ansehen, welche in den Gleichungen (1.) der momentanen Axe vorkommen. Auch die Summen $\Sigma\xi dx_0$, $\Sigma\alpha dx_0$, $\Sigma\lambda dx_0$

sind identisch mit den Grössen Π, K, Λ, weil sowohl diese als jene, durch dt dividirt, den Componenten der Geschwindigkeit des Anfangspunktes gleich werden.

Nun soll aber die Bewegung der Art sein, dass folgende Gleichungen stattfinden

$$(\theta.)\qquad \Pi = ag,\quad K = bg,\quad \Lambda v = cg,\quad pv = Ag,\quad qv = Bg,\quad r = Cg.$$

Diese Gleichungen können eine einfachere Form annehmen. In der That erhält man aus der vierten und fünften

$$Bp - Aq = 0.$$

d. i. die momentane Axe bleibt stets einer Ebene parallel, welche auf der Ebene der Curve senkrecht steht. Nimmt man diese Ebene als zy-Ebene, so ist $p = 0$, also $A = 0$, und die Gleichungen der momentanen Axe werden jetzt

$$x = P,\quad \frac{y-Q}{q} = \frac{z-R}{r}.$$

Ist nun r von Null verschieden, so kann man $r = g$ annehmen, also $C = 1$ setzen. (Der Fall, wo $r = 0$ ist, wird nachher betrachtet.) Dann werden die Gleichungen der momentanen Axe

$$x = P,\quad y - \frac{B}{v}z + a = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die momentane Axe die Gerade $y + a = 0$, $z = 0$ stets schneidet; wird diese Gerade als x-Axe angenommen, so wird $a = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, also auch $\Pi = 0$; alsdann werden die Gleichungen der momentanen Axe $x = P$, $y - \frac{Bz}{v} = 0$, und die zwischen den sechs Functionen der t gesetzten Gleichungen $(\theta.)$ werden jetzt

$$\Pi = 0,\quad K = br,\quad \Lambda v = cr,\quad p = 0,\quad qv = Br.$$

Die zweite und dritte geben nun

$$B\frac{d\varphi}{d\omega} + Pv = bv,\quad v\frac{d\varphi}{d\omega} - PB = c;$$

daraus folgt

$$(22.)\qquad P = \frac{bv^2 - Bc}{B^2 + v^2},\quad \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{(c + bB)v}{B^2 + v^2}.$$

Die verschiedenen Lagen, welche die momentane Axe (in Bezug auf die mit der Curve verbundenen Axen) einnimmt, bilden eine geradlinige Fläche, deren Gleichung man leicht findet, wenn man die Grössen v und P zwischen

den Gleichungen der Axe und der ersten Gleichung (22.) eliminirt; sie ist folgende

$$Bx(y^2+z^2) = bBz^2-cy^2.$$

Setzt man nun $x+\varrho$ statt x, so kann man die Constante ϱ so bestimmen, dass diese Gleichung von der Form wird

$$Bx(y^2+z^2) = bBz^2 \quad \text{oder} \quad x(y^2+z^2) = bz^2,$$

d. i. man kann $c = 0$ annehmen. Dann werden die Gleichungen, welche die Bewegung der Curve erfüllen muss:

$$\Pi = 0, \quad K = br, \quad \Lambda = 0;$$

oder

$$R = Q = 0, \quad P = \frac{bv^2}{v^2+B^2}, \quad \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{Bbv}{v^2+B^2};$$

$$p = 0, \quad qv = Br.$$

Die letzte Gleichung giebt v als Function von t; die übrigen geben

$$(23.)\quad \begin{cases} \Sigma\xi dx_0 = 0, \quad \Sigma\alpha dx_0 = br, \quad \Sigma\lambda dx_0 = 0, \\ \text{oder} \\ dx_0 = br\alpha, \quad dy_0 = br\beta, \quad dz_0 = br\gamma \\ \text{und} \\ \Sigma\alpha d\lambda = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man $x_0 y_0 z_0$, also die Bahn des Anfangspunktes o, bestimmen, wenn man die neun Cosinus $\alpha\ \beta\ \gamma,\ \xi\ \eta\ \zeta,\ \lambda\ \mu\ \nu$ kennt, welche nur die Gleichung $\Sigma\alpha d\lambda = 0$ zu erfüllen haben. Wie ich schon bewiesen habe (Bd. 95 S. 132 dieses Journals), drückt die Bedingung $\Sigma\alpha d\lambda = 0$ nichts weiter aus, als dass die Axen ox, oy, oz den drei Hauptrichtungen einer beliebig gewählten Curve immer parallel bleiben sollen (die Axe ox parallel zur Hauptnormale, die oy zur Tangente). Die Ebene der Curve bleibt also immer der Schmiegungsebene dieser Curve parallel. Die Grössen q, r werden mit den Krümmungselementen dieser Curve durch folgende Gleichungen verbunden

$$d\sigma = r, \quad d\tau = -q \quad \text{und} \quad ds = dt.$$

Die Bahn des Anfangspunktes o ist vollständig bestimmt, sobald die Leitcurve gewählt ist; denn aus den Gleichungen (23.) finden wir, da $r = d\sigma$ ist,

$$(23^*.)\quad x_0 = b\int\alpha\frac{ds}{\varrho}, \quad y_0 = b\int\beta\frac{ds}{\varrho}, \quad z = b\int\gamma\frac{ds}{\varrho},$$

wo ϱ der erste Krümmungsradius der Leitcurve ist.

Die Cosinus ξ, η, ζ der Hauptnormale der Leitcurve lassen sich nach den bekannten Formeln mit Hülfe von den Cosinus α, β, γ ihrer Tangente und ihren Ableitungen nach dem Arcus s ausdrücken. Setzt man also ihre Werthe in die Gleichungen (21.) und ersetzt x, y, z durch die Coordinaten der erzeugenden Curve (19.), welche jetzt (da $A=0$, $c=0$, $a=0$ und $C=1$ ist) folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} y &= b\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1-B\cos\varphi}+b(B-\cos\varphi)\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-B\cos\varphi)^2}, \\ x &= \frac{b\cos^2\varphi}{1-B\cos\varphi}+b\sin\varphi\int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-B\cos\varphi)^2}, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

so findet man für die erzeugte Fläche folgende Gleichungen

$$(24.)\quad \begin{cases} X = b\int\frac{\alpha\, ds}{\varrho}+\varrho\alpha' x+\alpha y, \\ Y = b\int\frac{\beta\, ds}{\varrho}+\varrho\beta' x+\beta y, \\ Z = b\int\frac{\gamma\, ds}{\varrho}+\varrho\gamma' x+\gamma y, \end{cases}$$

worin α, β, γ beliebige Functionen von s sind, die nur die Gleichung

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

zu erfüllen brauchen, und wo die Grösse ϱ durch die Gleichung bestimmt wird

$$1 = (\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\varrho^2.$$

Es ist zu bemerken, dass die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ox, oy, oz beschriebene Curve in den entsprechenden Punkten dieselben Hauptrichtungen hat wie die Leitcurve, aber ihr erster Krümmungsradius ϱ_0 ist constant. In der That finden wir aus den Gleichungen (23*.)

$$dx_0 = b\frac{ds}{\varrho}\cdot\alpha = \alpha_0 ds_0, \quad dy_0 = b\frac{ds}{\varrho}\cdot\beta = \beta_0 ds_0, \quad dz_0 = b\frac{ds}{\varrho}\cdot\gamma = \gamma_0 ds_0;$$

folglich ist

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \beta_0 = \beta, \quad \gamma_0 = \gamma \quad \text{und} \quad ds_0 = \frac{b\,ds}{\varrho}.$$

Durch nochmalige Differentiirung erhalten wir

$$\xi_0 d\sigma_0 = \xi d\sigma, \quad \eta_0 d\sigma_0 = \eta d\sigma, \quad \zeta_0 d\sigma_0 = \zeta d\sigma;$$

folglich

$$\xi_0 = \xi, \quad \eta_0 = \eta, \quad \zeta_0 = \zeta \quad \text{und} \quad d\sigma_0 = d\sigma,$$

woraus man sieht, dass die Tangenten und die Hauptnormalen der beiden

Curven parallel sind. Aus diesen Gleichungen kommt noch

$$\frac{ds_0}{d\sigma_0} = \varrho_0 = b,$$

d. i. der erste Krümmungsradius der Curve $(x_0 y_0 z_0)$ ist constant.

Um den Fall $i = 5$ zu erschöpfen, haben wir noch diejenige Art der Bewegung zu betrachten, bei welcher die Grösse r, also auch die Constante C, gleich 0 ist. Die Gleichungen (θ.) werden alsdann

$$p = 0, \quad qv = Bg, \quad r = 0,$$
$$\Pi = ag, \quad K = bg, \quad \Lambda v = cg;$$

oder

$$Rq = ag, \quad q\frac{d\varphi}{d\omega} = bg, \quad -PB = c;$$

oder

$$R = \frac{av}{B}, \quad \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{bv}{B}, \quad P = -\frac{c}{B}.$$

Die Gleichungen der momentanen Axe werden jetzt

$$x = P, \quad z = R,$$

und da P constant ist, so kann man durch Verschiebung der yz-Ebene $P = 0$ machen, also auch $c = 0$. Dann werden die Gleichungen der momentanen Axe

$$x = 0, \quad z = R;$$

sie bleibt also stets in der yz-Ebene und ist zur y-Axe parallel. Daraus folgt, dass die yz-Ebene bei der Bewegung eine beliebige Cylinderfläche berührt und die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ um die Berührungslinie (welche parallel zur y-Axe ist) mit der Gleitungsgeschwindigkeit längs derselben Linie durch die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{b}{a}R$$

verbunden ist. R bedeutet den Abstand der Berührungslinie von der y-Axe.

Die Gleichungen der erzeugenden Curve (19.) werden jetzt (da $C = 0$, $c = 0$ und $A = 0$ ist)

$$Bx = a\sin\varphi - b\cos\varphi, \quad By = -a\cos\varphi - b\sin\varphi + b\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

$$i = 4.$$

Wenn zwischen den Grössen Π, K, Λv, pv, qv, r der Gleichung (15.) nur 4 lineare und homogene Gleichungen bestehen, so muss die er-

zeugende Curve zwei Gleichungen genügen von der Form (16.)

$$(25.)\quad \begin{cases} a\xi+b\eta+c-Ay+Bx+C(y\xi-x\eta) = 0, \\ a'\xi+b'\eta+c'-A'y+B'x+C'(y\xi-x\eta) = 0, \end{cases}$$

oder nach Einführung des Winkels φ (17.)

$$-a\sin\varphi+b\cos\varphi+c-Ay+Bx-C(y\sin\varphi+x\cos\varphi) = 0,$$
$$-a'\sin\varphi+b'\cos\varphi+c'-A'y+B'x-C'(y\sin\varphi+x\cos\varphi) = 0.$$

Dieses aber kann nur dann eintreten, wenn die Curve ein Kreis ist. In der That finden wir aus der Formel (20.)

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{Aa+Bb+Cc}{(A\sin\varphi-B\cos\varphi+C)^2} = \frac{A'a'+B'b'+C'c'}{(A'\sin\varphi-B'\cos\varphi+C')^2};$$

folglich würden (falls nicht beide Zähler verschwinden) die zwei Ausdrücke $A\sin\varphi-B\cos\varphi+C$ und $A'\sin\varphi-B'\cos\varphi+C'$ ein constantes Verhältniss haben: es würde also sein $A' = A.\varepsilon$, $B' = B.\varepsilon$, $C' = C.\varepsilon$, dann kommt aber aus den Gleichungen (25.):

$$-a\varepsilon\sin\varphi+b\varepsilon\cos\varphi+c\varepsilon = -a'\sin\varphi+b'\cos\varphi+c';$$

also würde sein $a\varepsilon = a'$, $b\varepsilon = b'$, $c\varepsilon = c'$, und die zwei Gleichungen (25.) wären nicht verschieden von einander; es muss also sein

$$Aa+Bb+Cc = A'a'+B'b'+C'c' = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\varrho}{d\varphi} = 0,$$

also $\varrho = \text{const.}$, und die Curve ist ein Kreis.

Für den Fall des Kreises nimmt die Bedingungsgleichung (15.) folgende Form an

$$(26.)\quad -\Pi\cos\varphi-K\sin\varphi+v(\Lambda-p\varrho\sin\varphi+q\varrho\cos\varphi) = 0,$$

wenn man setzt

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi.$$

Ist nun $v = 0$, d. i., fallen die Normalen der Fläche in den Mittelpunkt des Kreises, so muss noch sein

$$\Pi = 0, \quad K = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass der Mittelpunkt des Kreises eine Curve beschreibt, auf der seine Ebene immer senkrecht steht. Die dabei erzeugte Fläche ist offenbar identisch mit der Fläche, welche erzeugt wird, wenn die Ebene des Kreises auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt; folglich ist diese Lösung in der schon gefundenen ($i = 6$) mit enthalten.

Ist v von Null verschieden, so zerspaltet sich die Gleichung (26.) in die folgenden

$$\Pi = vq\varrho, \quad K = -vp\varrho, \quad \varLambda = 0.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Geschwindigkeit des Mittelpunktes auf der Ebene des Kreises immer liegt; d. h. die Ebene des Kreises enthält immer die Tangente der vom Mittelpunkte beschriebenen Curve. Da nun die erzeugte Fläche durch eine Drehung des Kreises um den Mittelpunkt keine Aenderung erleidet, so kann man annehmen, dass ein und derselbe Radius des Kreises die von seinem Mittelpunkte beschriebene Curve berührt. Wird dieser Radius als x-Axe angenommen, so wird $K = 0$, also auch $p = 0$; und die Gleichungen, welche die Bewegung erfüllen soll, sind alsdann folgende

$$\Pi = vq\varrho, \quad K = 0, \quad \varLambda = 0, \quad p = 0,$$

oder

$$\Pi = vq\varrho, \quad q\frac{d\varphi}{d\omega} + Pr = 0, \quad r\frac{d\varphi}{d\omega} - Pq = 0, \quad p = 0,$$

also

$$\Pi = vq\varrho, \quad \frac{d\varphi}{d\omega} = 0, \quad P = 0, \quad p = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen dient zur Bestimmung von v, die zweite zeigt, dass keine Gleitung stattfindet, und die zwei übrigen, dass die momentane Axe stets in der yz-Ebene bleibt; diese Ebene ist aber senkrecht auf der vom Mittelpunkt beschriebenen Curve, folglich rollt dieselbe auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche. Wir schliessen also:

Ein Kreis bleibt Krümmungslinie der von ihm beschriebenen Fläche, wenn eine durch seinen Mittelpunkt gehende und mit ihm fest verbundene Ebene, auf der er senkrecht steht, auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

Athen, den 1. Februar 1884.

Ueber die Eigenschaften monocyklischer und anderer damit verwandter Systeme *).

Hierzu Figurentafel I.

(Von Herrn *Ludwig Boltzmann* in Graz.)

Der vollständigste mechanische Beweis des zweiten Hauptsatzes bestünde offenbar in der Darlegung, dass bei jedem beliebigen mechanischen Vorgange Gleichungen bestehen, welche denen der Wärmelehre analog sind. Da aber einerseits der Satz in dieser Allgemeinheit nicht richtig zu sein scheint und anderseits wegen unserer Unbekanntschaft mit dem Wesen der sogenannten Atome die mechanischen Bedingungen nicht genau angegeben werden können, unter denen die Wärmebewegung vor sich geht, so entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, in welchen Fällen und in wie weit die mechanischen Gleichungen den wärmetheoretischen analog sind. Es wird sich da nicht um Aufstellung von mechanischen Systemen handeln, welche warmen Körpern vollkommen congruent sind, sondern um Auffindung aller Systeme, welche mit dem Verhalten warmer Körper mehr oder weniger Analogie zeigen. In dieser Weise wurde die Frage zuerst von Herrn *von Helmholtz* **) gestellt, und ich beabsichtige, im Folgenden die von ihm entdeckte Analogie zwischen den Systemen, welche er als monocyklisch bezeichnet, und den Sätzen der mechanischen Wärmetheorie an einigen mit den monocyklischen innig verwandten Systemen weiter zu verfolgen, wobei ich zuvörderst, ehe ich zu allgemeinen Sätzen übergehe, einige ganz specielle Beispiele discutiren will ***).

*) Die ersten drei Paragraphen sind ein wenig veränderter Abdruck aus den Sitzungsber. der Wien. Akad. 110, p. 231—245, die übrigen sind neu.

**) Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 6. März und 27. März 1884.

***) Ein sehr allgemeines Beispiel monocyklischer Systeme bieten widerstandslose elektrische Ströme (vgl. *Maxwell*, treatise on electricity, art. 579 und 580, wo x und y die Stelle des *v. Helmholtz*schen p_a und p_b vertreten).

§ 1.

Ein Massenpunkt bewege sich nach dem *Newton*schen Gravitationsgesetze um einen fixen Centralkörper O in elliptischer Bahn. Die Bewegung ist hier offenbar keine monocyklische; wir können sie aber mittelst eines Kunstgriffes, den ich zuerst im ersten Abschnitte meiner Abhandlung „Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht“ *) anwandte, und welchen nachher *Maxwell* **) weiter verfolgt hat, in eine monocyklische verwandeln.

Wir denken uns die ganze elliptische Bahn mit Masse belegt, welche an jedem Punkte eine solche Dichte (auf die Längeneinheit der Bahn entfallende Masse) haben soll, dass, während im Verlaufe der Zeit fortwährend Masse durch jeden Bahnquerschnitt strömt, die Dichte in jedem Punkte der Bahn sich unverändert erhält. Würde ein Ring des Saturn aus einer homogenen Flüssigkeit oder einem homogenen Schwarme fester Körperchen bestehen, so könnte er bei passender Wahl des Ringquerschnittes an den verschiedenen Stellen ein Beispiel für die in Rede stehende Bewegung liefern. Aeussere Kräfte können die Bewegung beschleunigen oder die Eccentricität der Bahn verändern; es kann aber die Bahn auch durch sehr langsame Vermehrung oder Verminderung der Masse des Centralkörpers verändert werden, wobei dann auf den beweglichen Ring äussere Arbeit übertragen wird, da er bei Vermehrung der Masse des Centralkörpers im Allgemeinen auf die hinzukommende Masse nicht dieselbe Anziehung ausübt, wie auf die bei Verminderung hinwegzunehmende. Die diesem überaus einfachen Beispiele entsprechenden Formeln erhält man aus den in meiner Abhandlung: „Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie“ ***) Abtheilung 3 entwickelten Formeln, indem man $b = 0$ setzt und unter m die gesammte Masse des beweglichen Ringes versteht. (Dort ist übrigens aus Versehen die auf äussere Arbeit verwendete Wärme mit verkehrtem Zeichen eingeführt.) Ich bezeichne immer mit Φ die ganze potentielle Energie, mit L die ganze lebendige Kraft des Systems, mit dQ die auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit, wobei ich

*) Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 63. 13. April 1871.

**) Cambridge Philosophical Transactions Vol. XII. Part III. 6. Mai 1878. (Vgl. auch *Wiedemanns* Beiblätter, Bd. 5, p. 403. 1881.)

***) Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 75. 11. Jänner 1877. Vgl. auch *Clausius* Pogg. Ann. Bd. 142, p. 433; Math. Ann. von *Clebsch* Bd. 4, p. 232, Bd. 6, p. 390. Nachricht. d. Gött. Gesellsch. Jahrg. 1871 und 1872; Pogg. Ann. Bd. 150, p. 106 und Ergänzungsband 7, p. 215.

wie Herr *v. Helmholtz* voraussetze, dass die äusseren Kräfte immer nur unendlich wenig von solchen Werthen verschieden sein sollen, welche die augenblicklich vorhandene Bewegung stationär zu erhalten im Stande sind. Sei dann $\frac{a}{r^2}$ die gesammte Anziehungskraft, welche der Centralkörper auf die Masse des Ringes ausüben würde, wenn dieselbe sich in der Distanz r davon befände, C eine unbestimmbare vollständig constante Grösse, so ist:

$$\Phi = C - 2L, \quad dQ = -dL + 2L\frac{da}{a} = Ld\log\frac{a^2}{L};$$

es ist also L integrirender Nenner von dQ, der dazugehörende Werth der Entropie S ist $\log\frac{a^2}{L}$ und der dazugehörige Werth der charakteristischen Function ist:

$$K = \Phi + L - LS = C - L - L\log\frac{a^2}{L}.$$

Setzt man

$$2L\frac{\sqrt{L}}{a} = q, \quad \frac{a}{\sqrt{L}} = s,$$

so wird $dQ = q\,ds$, wozu die charakteristische Function

$$H = \Phi + L - qs = C - 3L$$

gehört, und man sieht sofort, dass

$$\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_L = \left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_q = -A$$

die auf Vergrösserung von a hinstrebende Kraft ist, in dem Sinne dass Ada das Quantum der inneren Bewegung ist, welches in Arbeit verwandelt wird, wenn a um da wächst. Ebenso ist

$$\left(\frac{\partial K}{\partial L}\right)_a = -S, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_a = -s.$$

Die Analogie mit Herrn *v. Helmholtz*s monocyklischen Systemen mit einer einzigen Geschwindigkeit q ist also eine vollständige. Es hat auch $\int q\,dt$ den Charakter einer Coordinate; denn

$$i = \pi\frac{\sqrt{2m}}{q}$$

ist die Umlaufszeit eines Massentheilchens (vgl. meine citirte Abhandlung). Sei $\varrho\,d\sigma$ die Masse auf dem Längenelemente $d\sigma$ der Bahncurve, dt die zur Durchlaufung von $d\sigma$ erforderliche Zeit, v die Geschwindigkeit daselbst, so

muss $\varrho v = c$ auf der ganzen Bahn constant sein, damit sich die Dichte überall unverändert erhält.

Da $\int \varrho v dt$, über die ganze Bahn erstreckt, die Gesammtmasse m des Ringes darstellt, so ist

$$c = \frac{m}{i} = q \frac{\sqrt{2m}}{2\pi}.$$

Ziehen wir vom Centralkörper irgend eine Gerade ins Unendliche, und bezeichnen mit μ die Masse, welche bis zu einem bestimmten Zeitmoment t durch jene Gerade hindurchging, so ist

$$\frac{d\mu}{dt} = \varrho v, \quad \text{daher} \quad q = \frac{2\pi}{\sqrt{2m}} \frac{d\mu}{dt}.$$

Denken wir uns nun irgend ein Massentheilchen des ganzen Ringes besonders hervorgehoben, so ist die Lage dieses Massentheilchens zur Zeit t bestimmt, sobald die Werthe a und μ zu dieser Zeit und die Anfangsposition des Massentheilchens sowie der Anfangswerth von a bekannt sind, ohne dass man die Art und Weise zu kennen braucht, wie sich die Bahn in der Zwischenzeit geändert hat. Es können daher a und μ als die Coordinaten des betreffenden Massentheilchens aufgefasst werden. Dasselbe gilt natürlich auch für jede andere Art von Centralbewegung, sobald nur die Bahn eine geschlossene ist. Wird z. B. jedes Massentheilchen ν mit einer Kraft $\frac{\nu a r}{m}$ gegen den Centralkörper gezogen, so wäre

$$\Phi = L, \quad dQ = 2dL - L\frac{da}{a} = Ld\log\frac{L^2}{a}, \quad q = 2\sqrt{a}, \quad s = \frac{L}{\sqrt{a}}.$$

§ 2.

Die Anwendung des Namens monocyklisch auch auf diese Bewegungsarten dürfte kaum ungerechtfertigt sein, da hier alle Bedingungen, an welche Herr *v. Helmholtz* diesen Namen knüpft, erfüllt sind. Dass die lebendige Kraft nicht proportional q^2 ist, gerade als ob Parameter eliminirt wären, dürfte wohl damit zusammenhängen, dass a nicht eine Raumabmessung im eigentlichen Sinne des Wortes ist. Analoge Formeln werden in einem noch allgemeineren Falle gelten. Die Kräfte brauchen keine Centralkräfte zu sein, sondern sie können durch beliebige Functionen der Coordinaten des von ihnen afficirten Massentheilchens dargestellt werden; nur muss eine Kraftfunction existiren, die Kräfte müssen für alle Massentheilchen der Gesammt-

masse m dieselben Functionen der Coordinaten sein, und alle Massentheilchen müssen congruente geschlossene Bahnen beschreiben.

Legt man dann durch den Schwerpunkt der Gesammtmasse m eine beliebige Ebene von unveränderlicher Richtung und bezeichnet mit μ die während einer beliebigen Zeit t durch jene Ebene hindurchgegangene Masse, so hat man zu setzen:

$$p_{\mathfrak{k}} = \mu, \quad q_{\mathfrak{k}} = \frac{d\mu}{dt}.$$

Die Bedingung der Bewegung in geschlossener Bahn ist immer erfüllt, wenn sich alle Massentheilchen in Geraden bewegen (ob in einer einzigen oder in beliebig vielen parallelen Geraden ist dabei gleichgültig). Sei dann μ die während einer beliebigen Zeit t im ersteren Fall durch den Schwerpunkt der Gesammtmasse m, im letzteren Falle durch eine den Schwerpunkt enthaltende auf den Bahnen senkrechte Ebene gegangene Masse, so sei wieder

$$p_{\mathfrak{k}} = \mu, \quad q_{\mathfrak{k}} = \frac{d\mu}{dt} = \frac{m}{i},$$

wobei i die Zeit ist, die ein Massentheilchen zu einem ganzen Hin- und Hergang auf der Geraden braucht. Heben wir jenen Massenpunkt aus der ganzen Masse m hervor, welcher sich zu Anfang der Zeit in deren Schwerpunkt (respective der oben definirten Ebene) befand. Kennt man zu einer beliebigen Zeit t den Werth von $p_{\mathfrak{k}}$ und das Wirkungsgesetz der Kräfte, so ist dadurch bestimmt, wo sich der hervorgehobene Massenpunkt zur fraglichen Zeit befindet, ohne dass man die Zwischenzustände des Systems zu kennen braucht. Zur Zeit t sei x die Distanz eines Massenpunktes vom Schwerpunkte der Gesammtmasse (respective jener Ebene), v dessen Geschwindigkeit, $f'(x)$ die auf die Masseneinheit wirkende Kraft, welche x zu verkleinern strebt, so ist:

$$v^2 = 2a - 2f(x), \quad i = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2a-2f}},$$

wobei x_1 und x_2 die extremsten Werthe des x sind. Die lebendige Kraft der ganzen Masse ist:

$$L = \frac{m}{i}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2a-2f}\,dx.$$

Die potentielle Energie ist

$$\Phi = \frac{2m}{i}\int_{x_1}^{x_2} \frac{f\,dx}{\sqrt{2a-2f}};$$

hiebei ist

$$f = f(x),$$

a ist eine Constante.

Man hat daher:

$$H = \Phi - L = ma - 2L.$$

Hiebei gelten a sowie die Form der Function f als die langsam veränderlichen Grössen. Betrachten wir letztere als constant und schreiben die obige Gleichung in der Form

$$iH = mia - 2m \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2a - 2f}\, dx,$$

so liefert deren Differentiation:

$$H + i\frac{\partial H}{\partial i} = ma + mi\frac{\partial a}{\partial i} - 2m\frac{\partial a}{\partial i}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2a - 2f}}$$

oder mit Rücksicht auf den für i gefundenen Ausdruck

$$H + i\frac{\partial H}{\partial i} = ma;$$

nach Herrn *v. Helmholtz* ist statt i die Variable $q = \frac{m}{i}$ einzuführen, was liefert

$$s = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{ma - H}{q} = \frac{2L}{q} = \frac{2iL}{m}.$$

Hieraus folgt endlich:

$$dQ = qds = \frac{2}{i}d(iL) = 2L.d\log(iL).$$

Dies stimmt genau mit dem, was Herr *Clausius* für einen etwas specielleren Fall auf ganz anderem Wege erhielt. (Vgl. dessen Abhandlung in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 19. Juni 1884.) Bei richtiger den *v. Helmholtz*schen Annahmen entsprechender Wahl der Coordinaten sind daher die Formeln des Herrn *v. Helmholtz* auch auf diesen Fall vollkommen anwendbar. Zum Zwecke des Uebergangs zu anderen Gattungen von Systemen will ich die Allgemeinheit wieder bedeutend beschränken und folgenden Specialfall des Vorigen betrachten.

Ein homogener, überall gleich dichter Strom bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf einer horizontalen Geraden von der Länge a zwischen zwei verticalen Wänden, so dass immer dessen halbe Masse $\frac{m}{2}$ in der einen und die gleiche in der entgegengesetzten Richtung strömt. Die Massen-

theilchen sollen weder auf einander Kräfte ausüben, noch äusseren Kräften unterworfen sein, mit Ausnahme derjenigen, welche die Arbeit dQ leisten. Von den verticalen Wänden sollen sie gleich elastischen Kugeln abprallen. Dieses System ist strenge monocyklisch. Man hat:

$$q = \frac{mv}{2a}, \quad H = -\frac{2a^2q^2}{m}, \quad dQ = mv\,dv + mv^2\frac{da}{a} = q\,ds,$$

wobei

$$s = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_a;$$

$-\left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_q$ ist der Druck auf die verticale Wand.

Wir modificiren das vorige Beispiel dahin, dass eine Masse m gleichförmig in einem parallelepipedischen Gefässe von den Seiten a, b, c vertheilt ist. Jedes Massentheilchen soll sich, ohne von den andern oder von äusseren Kräften influencirt zu werden (wieder mit Ausnahme der die Arbeit dQ erzeugenden), mit der Geschwindigkeit v in einer Geraden bewegen, welche auf der Seite c senkrecht steht und mit der Seite a den Winkel $\mathfrak{D}$ einschliesst (für die eine Hälfte der Massentheilchen $+\mathfrak{D}$, für die andere $-\mathfrak{D}$). Betrachten wir a, b und v als veränderlich, so ist:

$$\Phi = 0, \quad L = -H = \frac{mv^2}{2}, \quad dQ = mv\,dv + mv^2\left(\sin^2\mathfrak{D}\frac{da}{a} + \cos^2\mathfrak{D}\frac{db}{b}\right);$$

die Gleichungen nehmen daher genau die Form der *v. Helmholtz*schen an, wenn man a und b als Parameter p_a wählt und

$$q = \frac{v}{a^{\sin^2\mathfrak{D}}\,b^{\cos^2\mathfrak{D}}}$$

setzt.

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_{bq} \quad \text{und} \quad -\left(\frac{\partial H}{\partial b}\right)_{aq}$$

sind die Drucke in den Richtungen a und b; dQ ist gleich $q\,ds$, wobei

$$s = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{ab}.$$

Dagegen wäre die lebendige Kraft nicht mehr integrirender Nenner von dQ, wenn man auch solche äusseren Kräfte zuliesse, welche den Winkel $\mathfrak{D}$ langsam und für alle Massenpunkte gleichmässig verändern.

Würde die Masse m mit der constanten Geschwindigkeit v nach allen möglichen Richtungen des Raumes in einem Gefässe vom Volumen w strömen, so hätte man zu setzen:

$$q = \frac{v}{w^{\frac{1}{3}}}, \quad p_a = w,$$

und die Gleichungen würden wieder genau die *v. Helmholtz*sche Form annehmen. Allein in allen diesen Fällen hat $\int q\,dt$ nicht mehr den Charakter einer Coordinate, da die Bewegung keine nach einer endlichen Zeit in sich zurücklaufende ist. Ich möchte mir erlauben, Systeme, deren Bewegung in diesem Sinne stationär ist, als monodische oder kürzer als Monoden zu bezeichnen *). Sie sollen dadurch charakterisirt sein, dass die in jedem Punkte derselben herrschende Bewegung unverändert fortdauert, also nicht Function der Zeit ist, solange die äusseren Kräfte unverändert bleiben, und dass auch in keinem Punkte und keiner Fläche derselben Masse oder lebendige Kraft oder sonst ein Agens ein- oder austritt. Ist die lebendige Kraft integrirender Nenner des Differentiales dQ der auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichteten Arbeit, so will ich sie als Orthoden bezeichnen. Für alle Orthoden gelten Gleichungen, welche denen der mechanischen Wärmetheorie vollkommen analog sind.

Sei dQ das Differential der auf directe Steigerung der inneren Bewegung der Orthode gerichteten Arbeit oder der einem warmen Körper zugeführten Wärme. Wir nehmen an, dass L ein integrirender Nenner von dQ ist; für warme Körper ist dies erfüllt, wenn die Temperatur der lebendigen Kraft der Bewegung proportional ist. p seien beliebige Parameter. Wir setzen:

$$dQ = d\Phi + dL + \Sigma P\,dp = 2L\,d\log s.$$

Sei dann q ein beliebiger anderer integrirender Nenner von dQ und $dQ = q\,dS$, so besitzt nach Herrn *Gibbs* **) auch $\Phi + L - qS$ die Eigenschaften der *Massieu*schen charakteristischen Function. Setzen wir $q = \frac{2L}{s}$, so wird

$$dQ = q\,ds,$$

und der dazugehörende Werth der charakteristischen Function ist $H = \Phi - L$, genau wie es Herr *v. Helmholtz* für monocyklische Systeme fand. (Vgl. l. c. p. 173.) Nur ist jetzt $\int q\,dt$ im allgemeinen nicht mehr eine Coordinate. Für $q = \frac{2L}{s^n}$ wird $H = \Phi + \frac{n-2}{n}\cdot L$, für $n = 2$ also $H = \Phi$.

*) Mit dem Namen stationär wurde von Herrn *Clausius* jede Bewegung bezeichnet, wobei Coordinaten und Geschwindigkeiten immer zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben.

**) Transact. of the Conn. Acad. III, p. 108, 1875.

Ich erwähne hier noch beiläufig, dass der angeführte *Gibbs*sche Satz in gewissen singulären Fällen illusorisch werden kann, wenn nämlich q bloss Function der Parameter p ist. Es ist dann nicht möglich, nebst den p noch q als independente Variable einzuführen. So ist für Gase nach Herrn *v. Helmholtz*s Bezeichnung (l. c. p. 170):

$$dQ = J\gamma d\vartheta + J(c-\gamma)\frac{\vartheta dv}{v} = \frac{J\gamma}{v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}}} d(\vartheta v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}}).$$

Setzt man

$$q = \frac{J\gamma}{v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}}}, \quad S = \vartheta v^{\frac{c-\gamma}{\gamma}},$$

so wird

$$H = J\gamma\vartheta - qS = 0,$$

ist also als charakteristische Function unbrauchbar. Dasselbe tritt in dem am Schlusse des § 1 angeführten Beispiele für den dort mit q bezeichneten integrirenden Nenner ein.

§ 3.

Nach diesen einleitenden Beispielen will ich zu einem sehr allgemeinen Falle übergehen. Sei ein beliebiges System gegeben, dessen Zustand durch beliebige Coordinaten $p_1 p_2 \ldots p_g$ charakterisirt sei; die dazu gehörigen Momente seien $r_1 r_2 \ldots r_g$. Wir wollen sie kurz die Coordinaten p_g und die Momente r_g nennen. Dasselbe sei beliebigen inneren und äusseren Kräften ausgesetzt; erstere seien conservativ. ψ sei die lebendige Kraft, χ die potentielle Energie des Systems. Dann ist also χ eine Function der p_g, ψ eine homogene Function zweiten Grades der r_g, deren Coefficienten ebenfalls die p_g enthalten können. Die willkürliche zu χ hinzutretende Constante wollen wir so bestimmen, dass χ etwa für unendliche Entfernung aller Massentheilchen des Systems oder sonst für eine der Variation unfähige Position verschwindet. Wir machen nicht die beschränkende Annahme, dass gewisse Coordinaten des Systems gezwungen sind, bestimmte Werthe zu behalten, können daher auch die Veränderung der äusseren Kräfte nicht dadurch charakterisiren, dass gewisse bei Constanz der äusseren Kräfte constante Parameter ihre Werthe langsam verändern. Der langsamen Veränderlichkeit der äusseren Kräfte soll vielmehr dadurch Rechnung getragen werden, dass χ allmählich eine andere Function der Coordinaten p_g wird, oder

dass sich gewisse in χ vorkommende Constanten, deren eine p_a heissen soll, langsam verändern.

1. Fall. Wir denken uns nun sehr viele N genau gleich beschaffene derartige Systeme vorhanden; jedes System von jedem andern völlig unabhängig. Die Anzahl aller dieser Systeme, für welche die Coordinaten und Momente zwischen den Grenzen

p_1 und p_1+dp_1, p_2 und p_2+dp_2, ... r_g und r_g+dr_g

liegen, soll sein:

$$dN = Ne^{-h(\chi+\psi)}\frac{\sqrt{\Delta}d\sigma d\tau}{\int\int e^{-h(\chi+\psi)}\sqrt{\Delta}\,d\sigma d\tau},$$

wobei

$$d\sigma = \Delta^{-\frac{1}{2}}dp_1dp_2\dots dp_g, \quad d\tau = dr_1dr_2\dots dr_g$$

ist. (Ueber die Bedeutung von Δ siehe *Maxwell* l. c. pag. 556.)

Die Integrale sind über alle möglichen Werthe der Coordinaten und Momente zu erstrecken. Der Inbegriff aller dieser Systeme bildet eine Monode im früher definirten Sinne (vgl. hierüber namentlich *Maxwell* l. c.), und ich will die so definirte Gattung von Monoden mit dem Namen Holoden bezeichnen. Jedes der Systeme nenne ich ein Element der Holode. Die gesammte lebendige Kraft der Holode ist:

$$L = \frac{Ng}{2h}.$$

Deren potentielle Energie Φ ist gleich dem N-fachen Mittelwerthe $\bar{\chi}$ des χ, es ist also:

$$\Phi = N\cdot\frac{\int\chi e^{-h\chi}d\sigma}{\int e^{-h\chi}d\sigma}.$$

Die Coordinaten p_a unterscheiden sich dadurch von den *v. Helmholtz*schen p_b, dass sie in der lebendigen Kraft ψ und der potentiellen Energie χ eines Elements vorkommen. Die Bewegungsintensität der ganzen Ergode, also sowohl L als auch Φ sind nur von h und den p_a abhängig, wie bei Herrn *v. Helmholtz* von q_b und p_a.

Die auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit ist:

$$\delta Q = \delta\Phi+\delta L-N\frac{\int\delta\chi e^{-h\chi}d\sigma}{\int e^{-h\chi}d\sigma}$$

(vgl. hierüber meine Abhandlung „Analytischer Beweis des zweiten Haupt-

satzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft"*) und *Maxwell* l. c.). Der Betrag der inneren Bewegung, welcher aus äusserer Arbeitsleistung entsteht, sobald der Parameter p_a um δp_a wächst, ist also — $P\delta p_a$, wobei

$$-P = \frac{N\int \frac{\partial \chi}{\partial p_a} e^{-h\chi} d\sigma}{\int e^{-h\chi} d\sigma}.$$

Die lebendige Kraft L ist integrirender Nenner von δQ; alle Holoden sind daher orthodisch, und es müssen folglich auch die übrigen wärmetheoretischen Analogien bestehen. In der That, setzt man:

$$s = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\int e^{-h\chi} d\sigma\right)^{\frac{1}{g}} e^{\frac{h\chi}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{Ng}}\left(\int e^{-h\chi} d\sigma\right)^{\frac{1}{g}} e^{\frac{\Phi}{2L}},$$

$$q = \frac{2L}{s}, \quad K = \Phi + L - 2L\log s, \quad H = \Phi - L,$$

so wird

$$dQ = 2L d\log s = q ds, \quad \left(\frac{\partial K}{\partial p_a}\right)_h = \left(\frac{\partial H}{\partial p_a}\right)_q = -P, \quad \left(\frac{\partial K}{\partial h}\right) = -2\log s, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) = -s.$$

2. Fall. Es sollen wieder sehr viele (N) Systeme von der zu Anfang dieses Paragraphen geschilderten Beschaffenheit vorhanden sein; allein für alle derselben sollen die Gleichungen

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots \quad \varphi_k = a_k$$

erfüllt sein. Diese Gleichungen müssen also jedenfalls Integrale der Bewegungsgleichungen eines Systems sein. Es können aber auch noch andere Integrale vorhanden sein. dN sei die Zahl der Systeme, für welche die Coordinaten und Momente zwischen den Grenzen p_1 und $p_1 + dp_1$, p_2 und $p_2 + dp_2$, ... r_g und $r_g + dr_g$ liegen. Natürlich fehlen hier die Differentiale derjenigen Coordinaten oder Momente, welche durch die Gleichungen $\varphi_1 = a_1 \ldots$ bestimmt gedacht werden. Diese fehlenden Coordinaten oder Momente sollen p_c, p_d, ... r_f heissen; ihre Anzahl sei gleich k. Wenn dann

$$dN = \frac{\dfrac{N dp_1 dp_2 \ldots dr_g}{\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_d} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial r_f}}}{\displaystyle\iint \cdots \dfrac{dp_1 dp_2 \ldots dr_g}{\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_d} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial r_f}}}$$

ist, so wollen wir den Inbegriff aller N Systeme als eine Monode bezeichnen,

*) Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 63, April 1871, Formel 17.

welche durch die Gleichungen $\varphi_1 = a_1 \ldots$ beschränkt ist. Die Grössen a können entweder ganz constant sein oder zu den langsam veränderlichen Grössen gehören. Die Functionen φ werden im allgemeinen durch die Veränderlichkeit der p_a immer langsam ihre Form ändern. Jedes einzelne System heisst wieder ein Element. Monoden, welche nur durch die Gleichung der lebendigen Kraft beschränkt sind, will ich als Ergoden, solche, welche ausser dieser Gleichung auch noch durch andere beschränkt sind, als Subergoden bezeichnen. Ergoden sind dadurch definirt, dass

$$dN = \frac{\dfrac{N dp_1 dp_2 \ldots dp_g dr_1 \ldots dr_{g-1}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial r_g}}}{\displaystyle\iint \ldots \frac{dp_1 dp_2 \ldots dr_{g-1}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial r_g}}}$$

ist. Für Ergoden existirt also nur ein φ, welches gleich der für alle Systeme gleichen und während der Bewegung jedes Systemes constanten Energie eines Systemes $\chi + \psi = \frac{\Phi + L}{N}$ ist. Setzen wir wieder $\Delta^{-\frac{1}{2}} dp_1 dp_2 \ldots dp_g = d\sigma$, so ist (vgl. meine und *Maxwells* zuletzt citirte Abhandlung):

$$\Phi = N \frac{\int \chi \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}{\int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}, \quad L = N \frac{\int \psi^{\frac{g}{2}} d\sigma}{\int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma},$$

$$\delta Q = N \frac{\int \delta\psi \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}{\int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma} = \delta(\Phi + L) - N \frac{\int \delta\chi \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}{\int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}.$$

L ist wieder integrirender Factor von δQ, die dazu gehörende Entropie ist $\log\left(\int \psi^{\frac{g}{2}} d\sigma\right)^{\frac{2}{g}}$, während auch $\delta Q = q \delta s$ wird, wenn

$$s = \left(\int \psi^{\frac{g}{2}} d\sigma\right)^{\frac{1}{g}}, \quad q = \frac{2L}{s}$$

gesetzt wird. Zur letzteren Entropie gehört wieder die charakteristische Function $\Phi - L$. Die äussere Kraft in der Richtung des Parameters p_a ist in einem Systeme

$$-P = \frac{\int \dfrac{\partial \chi}{\partial p_a} \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}{\int \psi^{\frac{g}{2}-1} d\sigma}.$$

Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit der Subergoden führe ich diejenigen an, bei denen für alle Systeme nicht nur die in der Gleichung der lebendigen Kraft, sondern auch die in den drei Flächengleichungen vorkommenden Constanten die gleichen Werthe haben. Ich will sie Planoden nennen. Einige ihrer Eigenschaften entwickelte *Maxwell* l. c. Ich erwähne hier nur, dass sie im allgemeinen nicht mehr orthodisch sind.

Der Zustand eines Elementes einer Ergode ist durch gewisse Parameter p_3 bestimmt. Sobald jedes Element der Ergode ein Aggregat materieller Punkte ist und die Zahl der Parameter p_3 kleiner ist als die Zahl aller rechtwinkeligen Coordinaten aller materiellen Punkte eines Elementes, so wird es immer gewisse Functionen dieser rechtwinkeligen Coordinaten geben, welche während der gesammten Bewegung constant bleiben, und die vorhergehenden Entwicklungen setzen voraus, dass diese Functionen auch während der Zu- und Abfuhr der lebendigen Kraft constant bleiben. Würde man ausser der Veränderlichkeit der in der Kraftfunction vorkommenden Parameter auch noch eine langsame Veränderlichkeit dieser Functionen, welche dann die Rolle der *v. Helmholtz*schen p_a spielen würden, und welche hier gerade so wie die besagten Parameter mit p_a bezeichnet werden sollen, zulassen, so würde man zu Gleichungen gelangen, welche sowohl meine früheren als auch die *v. Helmholtz*schen Entwicklungen umfassen. Hierüber mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden.

Die Formeln, welche auf die Formel 18 meiner Abhandlung „Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft“ folgen, sind daselbst nicht in ihrer vollen Allgemeinheit entwickelt, indem dort erstens nur von *einem* Systeme die Rede ist, welches für sich allein alle möglichen mit dem Principe der lebendigen Kraft vereinbaren Zustände durchläuft und zweitens bloss von gewöhnlichen rechtwinkeligen Coordinaten Gebrauch gemacht wird; doch sieht man ohne weiteres nach dem von *Maxwell* in dessen hier schon oft citirten Abhandlung „on *Boltzmann*'s theorem etc.“ Gesagten, dass diese Formeln auch für beliebige durch beliebige generalisirte Coordinaten bestimmte Ergoden gelten müssen. Sind dieselben für ein Element einer Ergode wieder $p_1, p_2, \ldots p_g$, so erhält man:

$$\frac{d\mathfrak{N}}{N} = \frac{\Delta^{-\frac{1}{2}}\psi^{\frac{g}{2}-1}dp_1\ldots dp_g}{\int\int\ldots\Delta^{-\frac{1}{2}}\psi^{\frac{g}{2}-1}dp_1\ldots dp_g},$$

wobei N die Gesammtzahl der Systeme der Ergode, $d\mathfrak{N}$ die Zahl derjenigen Systeme ist, deren Coordinaten zwischen den Grenzen p_1 und p_1+dp_1, p_2 und p_2+dp_2, ... p_g und p_g+dp_g eingeschlossen sind. ψ ist die hiebei in Form von Geschwindigkeit in einem Systeme vorhandene lebendige Kraft. Die neunte an der citirten Stelle auf Formel 18 folgende Formel lautet dort

$$\tfrac{2}{3}\log\int\psi^{\frac{3\lambda}{2}}d\sigma+\text{const.}.$$

Diese Formel liefert, da die daselbst vorkommenden Grössen λ und T die Werthe $\frac{g}{3}$ und $\frac{3\psi}{g}$ haben und dort δQ das einem einzigen Systeme zugeführte Wärmedifferential ist:

$$\delta Q=\left(\frac{2L}{g}\right).\delta\log\iint\dots\Delta^{-\frac{1}{2}}\psi^{\frac{g}{2}}dp_1\dots dp_g=\frac{2N}{g}\frac{\delta\iint\dots\Delta^{-\frac{1}{2}}\psi^{\frac{g}{2}}dp_1\dots dp_g}{\iint\dots\Delta^{-\frac{1}{2}}\psi^{\frac{g}{2}-1}dp_1\dots dp_g},$$

δQ ist hier die der gesammten Ergode zugeführte Wärme in Arbeitsmaass. $L=N\psi$ ist die gesammte lebendige Kraft der Ergode. Es ist hiebei gleichgültig, ob man sich die Kraftfunction direct als veränderlich denkt, oder ob man annimmt, es gäbe ausser den Coordinaten p_β noch andere Coordinaten p_a, welche bei unveränderlichem Zustande der Ergode constant sind, sich aber langsam verändern, sobald sich dieser Zustand verändert, was natürlich im allgemeinen auch mit einer Veränderung des Werthes der Kraftfunction für gegebene Werthe von p_β verbunden ist. Um dies einzusehen, ist es gut, sich die p_β so gewählt zu denken, dass ihre Grenzen durch die Veränderung der p_a nicht direct, sondern höchstens durch die damit verbundene Veränderung der Kraftfunction beeinflusst werden. Den ausführlichen Beweis werde ich in einer späteren Abhandlung mittheilen. Für den Satz selbst ist es vollkommen gleichgültig, von welchen Coordinaten man Gebrauch macht. Herrn *v. Helmholtz*s monocyklische Systeme mit einer Geschwindigkeit sind nichts Anderes, als Ergoden mit einer einzigen rasch veränderlichen Coordinate, welche p_β heissen soll, da sie nicht wie das *v. Helmholtz*sche p_a der Bedingung unterworfen ist, dass ihre Ableitung nach der Zeit sehr langsam veränderlich ist. Es wird daher die obige Formel ebensowohl für monocyklische Systeme mit einer einzigen Geschwindigkeit als für warme Körper gelten, und dadurch scheint mir die von Hrn. *v. Helmholtz* entdeckte Analogie zwischen Rotationsbewegungen und idealen Gasen (vgl. dieses Journal Bd. 97 p. 123, Berl. Ber. p. 170) erklärt zu sein. Wenn ein einziges

System vorhanden ist, dessen rasch veränderliche Variabeln bereits alle mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbaren Werthecombinationen durchlaufen (Isomonode), so ist $N = 1$, $\psi = L$. Für einen rotirenden festen Körper ist $g = 1$; setzen wir p gleich dem Positionswinkel ϑ und $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, so wird $\psi = L = \frac{T\omega^2}{2} = \frac{r^2}{2T}$, $r = T\omega$; daher $\varDelta = \frac{1}{T}$, da immer $\varDelta = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots$ ist, wenn L die Form $\frac{\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 + \cdots}{2}$ hat. T ist das Trägheitsmoment; $\int\int \ldots dp_1 dp_2 \ldots$ reducirt sich auf $\int dp = 2\pi$ und kann weggelassen werden, sodass die obige allgemeine Formel liefert $\delta Q = L\delta \log(TL)$. Wenn eine einzelne Masse m in der Distanz ϱ von der Axe rotirt, kann man p gleich dem Wege s der Masse setzen; dann wird

$$\psi = L = \frac{mv^2}{2} = \frac{r^2}{2m}, \quad r = mv, \quad \varDelta = \frac{1}{m}, \quad \int\int \ldots dp_1 dp_2 \ldots = \int dp = 2\pi\varrho,$$

wobei $v = \frac{ds}{dt}$ ist; daher liefert die obige allgemeine Formel $\delta Q = L\delta \log(mL\varrho^2)$. Für ein ideales Gas mit einatomigen Molekülen ist wieder $N = 1$, $\psi = L$, $p_1 p_2 \ldots p_g$ sind die rechtwinkligen Coordinaten $x_1 y_1 \ldots z_n$ der Moleküle, daher $g = 3n$, wenn n die Gesammtzahl der Gasmoleküle, v das Volumen des Gases ist. $\int\int \ldots dp_1 dp_2 \ldots$ hat also den Werth v^n, $\varDelta$ ist constant, solange die Massen der Moleküle constant sind; daher liefert die obige allgemeine Formel $\delta Q = L\delta \log(L.v^{\frac{2}{3}})$, was wieder genau der richtige Werth ist, da in diesem Falle das Verhältniss der Wärmecapacitäten $\frac{5}{3}$ ist. Strömt eine Flüssigkeitsmasse M von der Dichte ϱ in einem in sich zurücklaufenden Kanale von im allgemeinen veränderlichem Querschnitte ω, so sind zwei Auffassungen möglich. 1. Jedes einzelne Flüssigkeitstheilchen ist ein System der Ergode, die ganze Flüssigkeit ist die Ergode selbst. Wir setzen $p = x$ gleich dem Wege des Flüssigkeitstheilchens, dessen Masse μ heisse, dann ist $g = 1$, N gleich der Gesammtzahl der Flüssigkeitstheilchen,

$$\psi = \frac{\mu u^2}{2}, \quad \varDelta = \frac{1}{\mu}, \quad \varrho\omega u = q = \text{const.},$$

und die allgemeine Formel liefert, da μ constant ist:

$$\delta Q = 2L\delta \log \int u dx = \int \varrho \omega u^2 dx \frac{\delta \int u dx}{\int u dx} = q \delta \int u dx.$$

2. Die gesammte Flüssigkeitsmasse ist ein System der Ergode, welche

überhaupt nur dieses eine System besitzt (isodisch ist). Dann muss p so gewählt werden, dass $\frac{dp}{dt}$ nicht rasch veränderlich ist. Setzen wir mit Hrn. *v. Helmholtz*

$$\frac{dp}{dt} = q = \varrho \omega u,$$

so wird

$$L = \frac{q^2}{2} \int \frac{dx}{\varrho\omega} = \frac{r^2}{2\int \frac{dx}{\varrho\omega}}, \quad r = \frac{\partial L}{\partial q} = q \int \frac{dx}{\varrho\omega}, \quad \varDelta = \frac{1}{\int \frac{dx}{\varrho\omega}}, \quad \int dp = M, \quad \psi = L,$$

und die allgemeine Formel liefert

$$\delta Q = 2L\delta \log \sqrt{L. \int \frac{dx}{\varrho\omega} \cdot M} = 2L\delta \log q \int \frac{dx}{\varrho\omega} = 2L\delta \log \int u dx.$$

Hier ist wie bei Hrn. *v. Helmholtz* ω der Querschnitt, dx ein Längenelement des Kanals, u die Strömungsgeschwindigkeit. Für Centralbewegungen könnten wir unter p_a den Polarwinkel ϑ von einem innerhalb der Bahn liegenden Punkte aus gezählt, unter $p_a(\varrho\vartheta) = \text{const.}$ die Gleichung der als eben vorausgesetzten Bahn verstehen. Die vorhergehende allgemeine Formel für δQ liefert dann, wenn m constant ist

$$\delta Q = \frac{m \int_0^{2\pi} \varrho^2 \omega d\vartheta}{\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\omega}} \delta \log \int_0^{2\pi} \varrho^2 \omega d\vartheta = \frac{m \int_0^{2\pi} d\vartheta \delta(\varrho^2 \omega)}{\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\omega}},$$

worin ϑ der Variation nicht fähig ist; ω ist gleich $\frac{d\vartheta}{dt}$; m ist die Gesammtmasse der Ergode. Die citirte allgemeine Formel für δQ gilt übrigens auch, wenn man unter p_a den Weg s versteht, und zwar für ebene und nicht ebene Bahnen. Dann wird, wenn man $\frac{ds}{dt} = v$ setzt,

$$\delta Q = \frac{v}{\int \frac{ds}{v}} \cdot \delta \int v ds,$$

wobei der erste Factor die von Herrn *v. Helmholtz* mit q_b, der auf das Zeichen δ folgende Ausdruck die von Herrn *v. Helmholtz* mit s_b bezeichnete Grösse ist. Da wir hier wieder das im Principe der kleinsten Wirkung erscheinende Integral $\int v ds$ haben, von dem ich schon im Jahre 1866 *) aus-

*) Sitzber. d. Wien. Akad. Bd. 53, 8. Februar 1866.

ging, so tritt wohl am besten der innere Zusammenhang aller dieser Untersuchungen zu Tage. Variirt man das Integral wirklich, so liefert $\int \delta v\, ds$ die auf directe Steigerung der lebendigen Kraft der Bewegung, $\int v\delta\, ds$ aber die auf Arbeitsleistung verwendete Wärmemenge. In der That, wenn R der Krümmungsradius der Bahn, δR die Verschiebung des Elementes ds in der Richtung R ist, so ist bei passender Art der Variation $\delta ds = \frac{\delta R ds}{R}$. Die auf ds vorhandene Masse ist

$$dm = \varrho v dt = \frac{m dt}{i} = \frac{m ds}{v i},$$

und deren Arbeit gegen die Centripetalkraft ist

$$\frac{v^2 dm \delta R}{R} = \frac{m v ds \delta R}{iR} = \frac{m v \delta ds}{\int \frac{ds}{v}}.$$

Für den Fall, dass sich die Masse m ergodisch auf einer Fläche bewegt, ist $g = 2$. Dann ist also ein endliches Flächenstück ganz mit Massentheilchen bedeckt, und die Dichte bleibt an jeder Stelle constant. Die Masse dm, welche sich auf einem Flächenelemente do befindet, ist proportional der in Gleichung 24) meiner Abhandlung „einige Sätze über Wärmegleichgewicht" bestimmten Grösse dt_4, also gleich $\frac{m do}{\int do}$. Ferner ist

$$\delta Q = \left(\frac{m}{2\int do}\right) \delta \int v^2 do,$$

wobei wieder $\int do \delta (v^2)$ die auf Steigerung der lebendigen Kraft, $\int v^2 \delta do$ aber die auf Ueberwindung der Centripetalkräfte aufgewendete Wärme ist. Hievon überzeugt man sich leicht durch wirkliche Ausrechnung jener Centripetalkräfte, wobei zu berücksichtigen ist, dass in der Ergode für jeden Punkt der Fläche jede Geschwindigkeitsrichtung gleich wahrscheinlich ist. Die hier immer verwendete allgemeine Formel gilt natürlich auch für zusammengesetzte monocyklische und polycyklische Systeme, sobald dieselben ergodisch sind, doch scheue ich mich, die Zahl der speciellen Beispiele noch weiter zu vermehren.

§ 4.

Auch die zusammengesetzten monocyklischen Systeme sind Ergoden mit einer einzigen rasch veränderlichen Grösse, sobald die Fesselung durch

$n-1$ Gleichungen zwischen den Grössen p_a und p_b bewirkt ist. Dann bleibt auch nur eine einzige rasch veränderliche Grösse übrig, und da dieselbe alle möglichen mit der Gleichung der lebendigen Kraft und den Fesselungsgleichungen vereinbaren Werthe durchläuft, so haben wir wieder eine Ergode mit einer einzigen rasch veränderlichen Grösse; denn die in den Fesselungsgleichungen vorkommenden Parameter sind zu den langsam veränderlichen Grössen zu rechnen, welche bei allen Phasen der rasch veränderlichen Grösse als constant zu betrachten sind. In allen diesen Fällen muss daher auch die lebendige Kraft integrirender Nenner sein, und es herrscht die vollständigste Uebereinstimmung zwischen meinen Gleichungen und denen des Herrn *v. Helmholtz.* Dasselbe gilt auch noch, wenn unter den Fesselungsgleichungen lineare Gleichungen mit constanten (auch nicht langsam veränderlichen) Coefficienten zwischen den q_b vorkommen, wie sie etwa erforderlich wären, um die Function von Zahnrädern auszudrücken, bei denen die Zahl der Zähne eine endliche ist. Bei Flüssigkeitsströmungen würden solche Gleichungen durch Schaufelräder bedingt, deren Umdrehungsgeschwindigkeit lediglich proportional dem Flüssigkeitsquantum ist, das durch jeden Querschnitt geht. Beispiele solcher Schaufelräder finden sich in den Gasuhren zur Messung der Quantität des verbrauchten Leuchtgases. Wenn dagegen die Coefficienten der Gleichungen zwischen den q_b langsam veränderlich sind, wie es bei Verbindung durch Frictionsrollen, Schnüren ohne Ende, Wasserrädern, die durch den Mittelswiderstand getrieben werden, etc., kurz bei allen Energie verzehrenden Kräften vorkommen kann, selbst wenn im speciellen Falle die verzehrte Energie unendlich klein höherer Ordnung ist, so sind die durch Integration dieser Gleichungen gewinnbaren Relationen im allgemeinen nicht mehr geeignet, das letzte p_b auf einen einzigen oder eine endliche Anzahl von Werthen zu beschränken, sobald alle andern p_a und p_b gegeben sind, sondern es kann vorkommen, dass dieses letzte p, wenn alle andern gegeben sind, noch eine unendliche Zahl continuirlich in einander übergehender Werthe annehmen kann. Dann verliert also das System seine ergodische Eigenschaft, und die lebendige Kraft ist im allgemeinen nicht mehr integrirender Nenner, ja ein integrirender Nenner von dQ braucht dann überhaupt nicht mehr zu existiren, wie ich bereits im Anzeiger der Wiener Akademie vom 9. October 1884 bemerkte; in diesem Falle können die veränderlichen Coefficienten der Fesselungsgleichungen entweder Functionen der schon früher eingeführten p_a sein, oder es können neue in-

dependente, langsam veränderliche Grössen hinzutreten, welche die langsame Veränderlichkeit der Fesselungsbedingungen ausdrücken und dann, wie mir scheint, ohne Bedenken und ohne weitere Unterscheidung den alten p_a beigezählt werden können.

Dies ist der einzige Fall, in welchem ich mit den Entwickelungen des Herrn *v. Helmholtz*, wenn ich dieselben überhaupt hierin richtig verstanden habe, in Widerspruch stehe, da Letzterer in diesem Journal Bd. 97, pag. 133 sagt: „So lange nur solche (nämlich rein kinematische) Verbindungen eingeführt werden, bleibt die lebendige Kraft einer der integrirenden Nenner des Systems.“ Herr *v. Helmholtz* findet dieses Resultat, indem er l. c. pag. 125 (vergl. auch ebenda pag. 117) voraussetzt, dass die Gleichung $dQ = 0$ ein Integral von der Form $\sigma = \text{const.}$ haben muss, worin σ eine Function der in dQ vorkommenden independenten Veränderlichen p_a und x ist. Allein diese Voraussetzung scheint mir nicht immer zulässig zu sein; vielmehr scheint mir die von Herrn *v. Helmholtz* l. c. pag. 126 angegebene Gleichung (6^b.) gerade die Bedingung anzugeben, dass dQ überhaupt integrirende Factoren besitzt; wenn dann die daselbst vorkommende Function F eine homogene Function der s_b ist, so ist unter den integrirenden Factoren die reciproke lebendige Kraft. Denn indem man statt σ eine passende Function von σ wählt, kann der Grad der Function F immer gleich eins gemacht werden. Für den einfachsten Fall, dass die Fesselungsfunction F linear mit constanten Coefficienten ist, kann man immer annehmen, dass letztere ein, wenn auch noch so kleines gemeinsames Maass haben, wodurch das System ergodisch wird. Ist dagegen F eine complicirtere homogene Function, so erhält man aus den *v. Helmholtz*schen Gleichungen orthodische Systeme, auf welche meine Gleichungen nicht mehr passen; freilich sind alle diese Systeme, soweit ich sehe, an mechanisch ziemlich unnatürliche Bedingungen geknüpft. Auch dürften nicht ohne weiteres alle Parameter veränderlich sein. Dagegen sind hinwiederum meine Gleichungen nicht darauf beschränkt, dass die Ableitungen aller rasch veränderlichen Grössen nach der Zeit Functionen einer einzigen Variabeln sind. In meinen Gleichungen können vielmehr beliebig viele independente Ableitungen q_β rasch veränderlicher Grössen p_β vorkommen. Die q_β können selbst wieder rasch veränderlich sein; nur die mittlere lebendige Kraft ist durch eine einzige Variable, die Temperatur, bestimmt. Es sind also die idealen Gase und jene Gattungen von Monoden, von denen schon *Maxwell*

l. c. nachwies, dass sie wahrscheinlich den in der Natur vorkommenden festen und tropfbar flüssigen Körpern entsprechen, meinen Formeln als specielle Fälle untergeordnet.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass dieser theoretisch mögliche Fall, dass die Gleichung $dQ = 0$ keinen integrirenden Factor besitzt, auch an Beispielen wirklich realisirbar ist. Um möglichst klar zu sein, will ich da ein ganz specielles, thunlichst einfaches Beispiel anführen, welches ganz in der von Herrn *v. Helmholtz* selbst angedeuteten Weise gebildet ist. Eine feste verticale Axe AB (Fig. 1) trage einen horizontalen Querarm, an dem eine Masse m verschiebbar ist, genau so, wie es an den Centrifugalmaschinen für Schulzwecke vorkommt; eine an der Masse m befestigte elastische Feder P, deren anderer Endpunkt mit der Schraube s am Querarm beliebig verstellt werden kann, leiste der Centrifugalkraft das Gleichgewicht. An ihre Stelle könnte auch eine an der Masse befestigte Schnur treten, welche die als hohl gedachte Axe durchsetzte und unten durch Gewichte mehr oder minder belastet würde, wie es in Figur 2 angedeutet ist; nur wäre dann das Gleichgewicht der Masse m labil. In derselben Weise trägt die Axe CD eine mit der Feder Π versehene Masse μ. Die Verstellung geschieht durch die Schraube σ. Die Entfernungen der beiden Massen m und μ von ihren bezüglichen Umdrehungsaxen sollen r und ϱ heissen. Die Umlaufsgeschwindigkeiten beider Axen sollen in folgender Weise unter einander in Beziehung gebracht sein. Die Axe AB trägt ein horizontales Zahnrad E vom Radius 1, welches in ein gleich grosses, verticales F eingreift; die Axe CD trägt eine horizontale Frictionsscheibe H vom Radius 1, welche sich an einer verticalen Scheibe G reibt; letztere ist an derselben Axe wie F befestigt. Durch eine Schraube t kann die Scheibe H in verschiedener Höhe an der Axe CD festgeklemmt und dadurch die senkrechte Entfernung a zwischen der Scheibe H und der Axe der Räder F und G beliebig regulirt werden. Sind w und ω die Winkelgeschwindigkeiten der Axen AB und CD, so bewirken die Frictionsräder, dass immer

$$\omega = aw$$

sein muss. Die Reibung ist freilich eine Energie verzehrende Kraft, wenn aber die Geschwindigkeitsänderungen immer sehr langsam vor sich gehen, sodass die an einander reibenden Flächen immer unendlich wenig verschiedene Geschwindigkeiten haben, so ist der Energieverlust bekanntlich unendlich klein zweiter Ordnung, und es kann daher die Verbindung als eine solche

betrachtet werden, welche keine Energie verzehrt. Mit Ausnahme dieser Reibungskraft sollen alle Bewegungen vollkommen ohne Bewegungshindernisse vor sich gehen, und alle Bestandtheile mit Ausnahme der Massen m und μ sollen massenlos sein.

Wir haben hier drei independente durch die Schrauben s, σ und t veränderliche Parameter p_a, nämlich r, ϱ und a, ferner zwei Parameter q_b, nämlich w und ω; w wollen wir als die *v. Helmholtz*sche Variable x wählen, während $\omega = ax$ ist. Der Werth von w kann durch die Kurbel K von aussen ebenfalls langsam verändert werden. Da die Kräfte der Federn P und Π als äussere gerechnet werden müssen, so ist die potentielle Energie der innern Kräfte $\Phi = 0$. (Φ kann immer $= 0$ gesetzt werden, wenn die potentielle Energie bloss von den p_a, nicht auch von den q_b abhängt, da die p_a nur durch äussere Kräfte verändert werden können, die p_b aber gemäss der Definition nicht in Φ vorkommen dürfen.) Die gesammte lebendige Kraft ist

$$L = -H = \frac{mr^2w^2}{2} + \frac{\mu\varrho^2\omega^2}{2}.$$

Setzen wir

$$s_1 = -\frac{\partial H}{\partial w} = mr^2 w,$$
$$s_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = \mu\varrho^2\omega,$$

so ist die gesammte, der Kurbel K mitzutheilende Energie

$$\begin{aligned} dQ &= w\,ds_1 + \omega\,ds_2 \\ &= mw\,d(r^2w) + \mu\omega\,d(\varrho^2\omega). \end{aligned}$$

Hiervon wird der Theil

$$mr^2w\,dw + mw^2r\,dr + \mu\varrho^2\omega\,d\omega + \mu\omega^2\varrho\,d\varrho$$

auf Erhöhung der lebendigen Kraft L verwendet.

Ausserdem werden noch bei Vergrösserung der Distanzen r und ϱ die Arbeiten

$$mw^2r\,dr \quad \text{und} \quad \mu\omega^2\varrho\,d\varrho$$

in Ueberwindungen der Spannungen der Federn geleistet, welche Spannungen die Werthe

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = mw^2r \quad \text{und} \quad -\frac{\partial H}{\partial \varrho} = \mu\omega^2\varrho$$

haben. Führen wir die p_a und x, also in unserem Beispiele r, ϱ, a und w als independente Veränderliche ein, so erhalten wir

$$dQ = 2mw^2r\,dr + 2\mu a^2w^2\varrho\,d\varrho + (mr^2 + \mu a^2\varrho^2)w\,dw + \mu\varrho^2w^2a\,da,$$

und man überzeugt sich leicht, dass hier nicht nur die lebendige Kraft nicht

integrirender Nenner ist, sondern dass dQ überhaupt keinen integrirenden Factor besitzt, durch welchen es in das vollständige Differential einer Function von r, ϱ, w und a verwandelt würde. Dieser Fall unterscheidet sich von dem von Herrn *v. Helmholtz* betrachteten noch insofern, als hier durch die Fesselung eine ganz neue independente a eingeführt wird. Da aber a eine ganz unabhängige Grösse ist, so können leicht solche Bedingungen ersonnen werden, welche a zu einer beliebigen Function der p_a, also von r und ϱ machen.

Am einfachsten ist es, wenn man sich die Schraube t hinwegdenkt und dafür die Frictionsscheibe H irgendwie durch ein Gestänge mit der Masse μ verbunden denkt. Sei z. B. die Verbindung durch eine vollkommen biegsame Stange von constanter Länge bewirkt, deren Enden an μ und H festgemacht sind, und deren einer Theil immer parallel CD, deren anderer immer parallel dem die Masse μ tragenden Querarme geht, und welche an ihrer Biegungsstelle über eine reibungslose Rolle läuft. Dann wäre

$$a = \varrho + \text{const.}$$

oder bei passender Wahl der Länge der biegsamen Stange noch einfacher

$$a = \varrho.$$

Dies würde liefern

$$dQ = 2mw^2 r dr + 3\mu w^2 \varrho^3 d\varrho + (mr^2 + \mu\varrho^4) w dw = X dr + Y d\varrho + Z dw,$$

und es ist

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial w} - \frac{\partial Z}{\partial \varrho}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\partial X}{\partial w}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial \varrho} - \frac{\partial Y}{\partial r}\right) = -2m\mu w^3 \varrho^3 r.$$

Die Bedingung der Integrabilität von dQ ist also nicht erfüllt. a könnte natürlich die mannigfachsten Formen erhalten, wenn statt des Rades F und der Scheibe G schon auf der Axe AB ein beliebiger Rotationskörper aufgesteckt wäre, der undrehbar gegen die Axe aber daran reibungslos verschiebbar und durch ein Gestänge mit der Masse m verbunden wäre; auf ihm würde direct die Frictionsscheibe H laufen, ähnlich wie es schon Herr *v. Helmholtz* in seinen Abhandlungen angedeutet hat, doch habe ich hier absichtlich das Beispiel so einfach wie möglich gewählt.

Ueber einen Umstand muss ich hier noch eine Bemerkung beifügen: die hier angenommenen rotirenden Massen sind nicht symmetrisch um die Rotationsaxe gebaut, doch sieht man sofort, dass dies vollkommen unwesentlich ist, und dass dieselben Formeln auch auf vollkommen symmetrische rotirende Körper mit veränderlichem Trägheitsmomente anwendbar wären.

Man könnte ja das System sofort in eine Monode verwandeln, indem man sich unendlich viele Axen AB und CD vorhanden denkt, auf denen die Massen m und μ alle möglichen Winkelstellungen haben, wobei natürlich jede Winkelstellung gleich wahrscheinlich sein muss*), allein das in Fig. 1 dargestellte System ist dann keine Ergode; denn bezeichnen wir den Positionswinkel $\int w dt$ irgend einer der Massen m mit W, den irgend einer Masse μ mit Ω, so werden im Verlauf der Zeit sich einem bestimmten Werthe des W alle möglichen Werthe von Ω zugesellen, da a im allgemeinen irrational sein wird. Wäre also das System eine Ergode, so müssten auch alle möglichen Werthepaare von

$$w = \frac{dW}{dt} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{d\Omega}{dt}$$

vorkommen, welche mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbar sind.

Es verhält sich das in Fig. 1 dargestellte System in dieser Hinsicht wie eine Centralbewegung in einer nicht geschlossenen Bahn, wo sich ebenfalls einem bestimmten Werthepaare der rechtwinkligen Coordinaten x und y nicht alle mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbaren Richtungen zugesellen. Eine Ergode würde erst entstehen, wenn unendlich viele derartige Systeme neben einander bestünden, für welche a alle möglichen Werthe hätte und nur die lebendige Kraft constant wäre, sodass alle möglichen Werthe von ω vorkämen und nur w durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt wäre.

§ 5.

Da die Wirksamkeit der Reibungskraft bei Frictionsrollen nicht ohne alle Unklarheit ist, so scheint es mir behufs der möglichsten Präcisirung der Begriffe nicht überflüssig zu zeigen, wie sich in dem von uns betrachteten Falle die Reibungskraft auf die Wirksamkeit von Zahnrädern mit einer unendlichen Anzahl von Zähnen zurückführen lässt. Sei O das Centrum und OP der Radius eines Zahnrades, dessen Ebene vertical und senkrecht zur Ebene der Figur 3 steht; die Zähne sollen senkrecht auf der

*) Jedesmal, wenn jedes einzelne System der Monode im Verlaufe der Zeit alle an den verschiedenen Systemen gleichzeitig neben einander vorkommenden Zustände durchläuft, kann an Stelle der Monode ein einziges System gesetzt werden. Nur müssen dann die Veränderungen der langsam veränderlichen Grössen mit so geringer Geschwindigkeit erfolgen, dass sie während der ganzen Zeit unendlich klein bleiben, welche das System braucht, um alle seine Zustände zu durchlaufen, und jene Veränderungen müssen während dieser ganzen Zeit gleichförmig erfolgen. Für eine solche Monode wurde schon früher die Bezeichnung „isodisch“ vorgeschlagen.

Ebene des Rades in sehr vielen concentrischen Kreisen angeordnet sein, jeder nächstfolgende Kreis soll einen Zahn mehr als der vorhergehende enthalten. Die Distanz je zweier Zahnreihen soll unendlich klein, die Dicke ε der Zähne selbst aber unendlich klein höherer Ordnung sein, letzteres, damit ein zweites Zahnrad ohne Störung in jede beliebige Zahnreihe eingreifen kann. QR soll der Durchschnitt eines derartigen zweiten Zahnrades sein. Die Ebene desselben sei horizontal und ebenfalls senkrecht zur Ebene der Figur 3, sein Mittelpunkt sei O', ν sei die Anzahl seiner Zähne, welche in der Radebene liegen, und deren Dicke ε' ebenfalls gegen die Distanz je zweier Zahnreihen des ersten Rades verschwinden soll. Das Rad QR soll anfangs in eine Zahnreihe mit $n-1$ Zähnen eingreifen; durch eine Verschiebung parallel mit sich selbst soll es aus dieser Zahnreihe herausgehoben und sanft gegen die nächste gedrückt werden. Es wird sich so lange mit der alten Geschwindigkeit drehen, bis es in die neue Zahnreihe mit n Zähnen einschnappt; an der Bewegung über diese Zahnreihe hinaus soll es durch einen passenden Anschlag an der Axe verhindert sein. Durch einen Druck der beiden Zahnräder gegen einander erfolgt eine unendlich kleine Aenderung ihrer Winkelgeschwindigkeit; die früheren Winkelgeschwindigkeiten beider Zahnräder sollen mit w und ω, die neuen mit w_1 und ω_1 bezeichnet werden. Die Distanz je zweier Zahnmitten, welche für beide Zahnräder und alle Zahnreihen dieselbe ist, soll δ heissen; dann wird sein

$$(n-1)w = \nu\omega,$$
$$nw_1 = \nu\omega_1.$$
$$\frac{(n-1)\delta}{2\pi}, \quad \frac{n\delta}{2\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\nu\delta}{2\pi}$$

sind die Radien der Zahnräder von der Eingriffstelle an gezählt. Sei f das Zeitintegral des gesammten Druckes an der Eingriffstelle, so sind $\frac{n\delta f}{2\pi}$ und $\frac{\nu\delta f}{2\pi}$ die Momente dieses Integraldrucks bezüglich der beiden Axen. m soll das auf die Winkelgeschwindigkeit 1 bezogene Massenmoment der mit dem Rade OP verbundenen Masse sein (also das Trägheitsmoment des um die Axe O drehbaren festen Körpers, falls jene Masse fix mit der Axe des ersten Rades verbunden ist); dieselbe Bedeutung soll μ für das zweite Rad haben. Dann ist

$$2\pi m(w-w_1) = n\delta f,$$
$$2\pi\mu(\omega_1-\omega) = \nu\delta f,$$

daher

$$m\nu(w-w_1) = \mu n(\omega_1-\omega),$$

woraus folgt:

$$w_1-w = -\frac{w\mu n}{(m\nu^2+\mu n^2)},$$

$$\omega_1-\omega = \frac{m\nu^2\omega}{(n-1)(m\nu^2+\mu n^2)}.$$

Erfolgt der Uebergang continuirlich von Zahnreihe zu Zahnreihe bis w, ω und n die Werthe W, Ω und N angenommen haben, so kann das schliessliche Resultat durch Integration nach n gefunden werden, indem man in die vorige Gleichung $\frac{dw}{dn}$ und $\frac{d\omega}{dn}$ statt w_1-w und $\omega_1-\omega$ schreibt, was liefert

$$\frac{dw}{w} = -\frac{\mu n dn}{(m\nu^2+\mu n^2)},$$

und durch Integration

$$W = w\sqrt{\frac{(m\nu^2+\mu n^2)}{(m\nu^2+\mu N^2)}},$$

während Ω aus der Gleichung

$$NW = \nu\Omega$$

folgt. Wie vorauszusehen war, ist die verzehrte Energie unendlich klein höherer Ordnung, und es bestätigt sich die im Früheren gemachte Annahme, dass die gesammte lebendige Kraft beider Räder durch die allmähliche Verschiebung des zweiten unverändert bleibt, denn die Gleichungen

$$mW^2+\mu\Omega^2 = mw^2+\mu\omega^2,$$

$$nw = \nu\omega \quad \text{und} \quad NW = \nu\Omega$$

liefern dieselben Werthe.

§ 6.

Genau dieselben Formeln gelten auch für die Flüssigkeitsbewegung in zwei in sich zurücklaufenden Kanälen, wenn der Querschnitt des ersten Kanals veränderlich, aber zu einer gegebenen Zeit an allen Stellen gleich ist und dasselbe auch für den zweiten Kanal gilt, und ich will diesen Fall hier noch in Kürze behandeln, sei es auch nur zu dem Zwecke, die sehr allgemeinen *v. Helmholtz*schen Formeln durch ausführliche Discussion eines Beispieles dem Verständnisse näher zu bringen. r sei die Länge, g der Querschnitt, s die als vollkommen constant vorausgesetzte Dichte der Flüssigkeit im ersten Kanale, f deren Geschwindigkeit. Die gesammte im ersten

Kanale enthaltene Flüssigkeitsmasse, welche wir der Analogie mit dem vorigen Probleme halber mit $\frac{1}{m}$ bezeichnen wollen, ist sgr; die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehende Flüssigkeitsmasse ist

$$w = sgf = \frac{f}{rm}.$$

Dieselben Grössen sollen für den zweiten Kanal mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden. Da keine weiteren inneren Kräfte existiren sollen, so ist

$$\Phi = 0,$$

$$L = -H = \frac{f^2}{2m} + \frac{\varphi^2}{2\mu},$$

$$= \frac{mr^2w^2}{2} + \frac{\mu\varrho^2\omega^2}{2},$$

und alle früher entwickelten Formeln sind unverändert, nur mit anderer Bedeutung der Buchstaben anwendbar. Die Verbindung beider Kanäle kann man sich dadurch bewerkstelligt denken, dass in jeden ein Rad taucht, dessen Geschwindigkeit in Folge des Mittelswiderstandes immer nur unendlich wenig von der der Flüssigkeit abweicht. Die Umlaufszeiten beider Räder stehen dann wie früher durch Frictionsrollen in einem bestimmten Verhältnisse, das sich sowie r und ϱ langsam ändern kann. Die ganze Vorrichtung läuft darauf hinaus, dass wieder

$$\omega = aw$$

wird, wobei a bei unveränderten äusseren Verhältnissen constant ist, mit der Zeit sich aber langsam beliebig verändern kann. Eine weitere Verallgemeinerung ist hier durch die Annahme möglich, dass der Querschnitt g an verschiedenen Stellen verschieden ist. Bezeichnen wir mit n die von einem bestimmten Querschnitte an gezählte Flüssigkeitsmasse, so kann dann g als eine langsam veränderliche Function von n betrachtet werden; $\int dn$ ist die unveränderliche Gesammtmasse $\frac{1}{m}$ der Flüssigkeit, wodurch wir uns r als bestimmt denken; dn kann also als der Variation unfähig betrachtet werden. Dann ist

$$L = -H = \frac{\int f^2 dn}{2} + \frac{\int \varphi^2 d\nu}{2}$$

$$= \frac{w^2}{2s^2}\int\frac{dn}{g^2} + \frac{\omega^2}{2\sigma^2}\int\frac{d\nu}{\gamma^2};$$

der Werth von s_6 für den ersten Kanal ist

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{w}{s^2}\int \frac{dn}{g^2}.$$

Die auf Deformation des Kanales verwendete Arbeit ist

$$\delta L = -\frac{w^2}{s^2}\int \frac{dn\,\delta g}{g^3},$$

wobei δ jede durch Deformation der Kanäle erzeugte Veränderung bezeichnet. Dann ist

$$dQ = wd\left(\frac{w}{s^2}\int \frac{dn}{g^2}\right) + \omega d\left(\frac{\omega}{\sigma^2}\int \frac{d\nu}{\gamma^2}\right)$$

$$= \frac{wdw}{s^2}\int \frac{dn}{g^2} - \frac{2w^2}{s^2}\int \frac{dn\,\delta g}{g^3} + \frac{\omega d\omega}{\sigma^2}\int \frac{d\nu}{\gamma^2} - \frac{2\omega^2}{\sigma^2}\int \frac{d\nu\,\delta\gamma}{\gamma^3},$$

welcher Ausdruck wieder im allgemeinen keinen integrirenden Factor besitzt, wenn $\omega = wa$ ist und w, a, g und γ entweder alle independent veränderlich sind oder a irgendwie durch g und γ bestimmt ist*).

Graz, den 9. October 1884.

---

*) Unmittelbar vor der Expedition des letzten Correcturbogens sah ich im vorigen Hefte dieses Journals den 2. Aufsatz des Herrn *v. Helmholtz* über diesen Gegenstand, welcher offenbar ebenso wichtig und inhaltsreich wie der erste ist. Ich bin natürlich nicht mehr in der Lage denselben hier irgendwie zu benützen und bemerke nur, dass mir meine Einwände auch gegenüber der von Herrn *v. Helmholtz* in § 8 gegebenen Deduction haltbar zu sein scheinen, falls selbe beweisen soll, dass in allen physikalisch möglichen monocyklischen Systemen die lebendige Kraft bedingungslos integrirender Nenner von dQ ist. Diese Deduction scheint mir vielmehr bloss darzuthun, dass, wenn überhaupt integrirende Factoren existiren, einer davon die reciproke lebendige Kraft sein muss.

Graz, den 8. Dezember 1884.

Note in connexion with the hyperelliptic integrals of the first order.

(By professor *A. Cayley* at Cambridge.)

In the early paper by Mr. *Weierstrass* „Zur Theorie der *Abel*schen Functionen“ this Journal t. 47 (1854) pp. 289—306, we have pp. 302—303, certain equations (43.), and (stated to be deduced from them) an equation (49.). Taking for greater simplicity $n=2$, the equations (43.) written at full length are

$$(43.)\quad \begin{cases} K_{11}J_{12}-K_{12}J_{11}+K_{21}J_{22}-K_{22}J_{11}=0, & K'_{11}J'_{12}-K'_{12}J'_{11}+K'_{21}J'_{22}-K'_{22}J'_{11}=0,\\ K_{11}J'_{12}-K'_{12}J_{11}+K_{21}J'_{22}-K'_{22}J_{21}=0, & K_{12}J'_{11}-K'_{11}J_{12}+K_{22}J'_{21}-K'_{21}J_{22}=0,\\ K_{11}J'_{11}-K'_{11}J_{11}+K_{21}J'_{21}-K'_{21}J_{21}=\tfrac{1}{2}\pi, & K_{12}J'_{12}-K'_{12}J_{12}+K_{22}J'_{22}-K'_{22}J_{22}=\tfrac{1}{2}\pi, \end{cases}$$

viz. in the theory of the hyperelliptic functions depending on the radical $\sqrt{x-a_0.x-a_1.x-a_2.x-a_3.x-a_4}$, these are relations between the eight integrals K of the first kind, and the eight integrals J of the second kind. Each equation contains both K's and J's, and there is not in the paper any express mention of a relation between the K's only, which occurs in *Rosenhain*'s Memoir, and is a leading equation in the theory. But taking as before $n=2$, and for the G's which occur in (49.) substituting their values as obtained from the preceding equations (46.) and (47.), the equation becomes

$$(49.)\qquad K_{11}K'_{21}-K_{21}K'_{11}+K_{12}K'_{22}-K_{22}K'_{12} \;=\; 0,$$

which is the equation in question: it is the equation $\omega_0 v_3-\omega_3 v_0+\omega_1 v_2-\omega_2 v_1=0$ of *Hermite*'s Memoir „Sur la théorie de la transformation des fonctions *Abél*iennes“ Comptes Rendus t. 40 (1855).

It is interesting to see how the equation (49.) is derived from the equations (43.). I write for greater convenience

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} K_{11}, & K_{12}, & K_{21}, & K_{22}, & K'_{11}, & K'_{12}, & K'_{21}, & K'_{22}, & J_{11}, & J_{12}, & J_{21}, & J_{22}, & J'_{11}, & J'_{12}, & J'_{21}, & J'_{22} \\ = A, & B, & C, & D, & A', & B', & C', & D', & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta'. \end{array}$$

The given equations then are

$$(43.)\quad \begin{cases} A\beta-B\alpha+C\delta-D\gamma=0, & A'\beta'-B'\alpha'+C'\delta'-D'\gamma'=0, \\ A\beta'-B'\alpha+C\delta'-D'\gamma=0, & A'\beta-B\alpha'+C'\delta-D\gamma'=0, \\ A\alpha'-A'\alpha+C\gamma'-C'\gamma=\tfrac{1}{2}\pi, & B\beta'-B'\beta+D\delta'-D'\delta=\tfrac{1}{2}\pi; \end{cases}$$

and it is required to show that these lead to the relation

$$(49.)\quad AC'-A'C+BD'-B'D = 0.$$

From the first and fourth equations, and from the second and third equations of (43.), we deduce

$$(AC'-A'C)\beta+(C\alpha'-C'\alpha)B+(C\gamma'-C'\gamma)D = 0,$$
$$(AC'-A'C)\beta'+(C\alpha'-C'\alpha)B'+(C\gamma'-C'\gamma)D' = 0,$$

and again from the first and third equations, and from the second and fourth equations of (43.), we deduce

$$(BD'-B'D)\alpha+(D\beta'-D'\beta)A+(D\delta'-D'\delta)C = 0,$$
$$(BD'-B'D)\alpha'+(D\beta'-D'\beta)A'+(D\delta'-D'\delta)C' = 0.$$

These pairs of equations give respectively

$$AC'-A'C : C\alpha'-C'\alpha : C\gamma'-C'\gamma = BD'-B'D : D\beta'-D'\beta : -(B\beta'-B'\beta);$$

and

$$AC'-A'C : C\alpha'-C'\alpha : -(A\alpha'-A'\alpha) = BD'-B'D : D\beta'-D'\beta : D\delta'-D'\delta;$$

whence putting for shortness $A\alpha'-A'\alpha$, $B\beta'-B'\beta$, $C\gamma'-C'\gamma$, $D\delta'-D'\delta = \mathrm{a, b, c, d}$, we have

$$\frac{AC'-A'C}{BD'-B'D} = -\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}};\quad \text{whence}\quad \mathrm{ab}=\mathrm{cd}.$$

But the last two of the equations (43.) are

$$\mathrm{a}+\mathrm{c}=\tfrac{1}{2}\pi,\quad \mathrm{b}+\mathrm{d}=\tfrac{1}{2}\pi;$$

we have thus $\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{d}, =\mathrm{b}+\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{c}}, =\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}(\mathrm{a}+\mathrm{c})$; or since $\mathrm{a}+\mathrm{c}, =\tfrac{1}{2}\pi$, is not $=0$, this gives $\mathrm{b}=\mathrm{c}$, whence also $\mathrm{a}=\mathrm{d}$, and we have

$$\frac{AC'-A'C}{BD'-B'D} = -1,\quad \text{that is}$$
$$AC'-A'C+BD'-B'D = 0,$$

the required equation.

Cambridge, 10th. September 1884.

Ueber Integrale transcendenter Functionen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Bekanntlich hat *Abel* den für die Ausbildung der Integralrechnung fundamentalen Satz bewiesen, dass, wenn

$$\int y\,dx,$$

worin y eine algebraische Function von x bedeutet, selbst eine algebraische Function ist, diese letztere sich auch als rationale Function von x und y darstellen lässt, und ähnliche Sätze für Integrale algebraischer Functionen, welche sich durch Logarithmen und elliptische Integrale ausführen lassen, und die auch in noch weiterer Ausdehnung sämmtlich eine einheitliche Darstellung zulassen. Ich habe schon früher in einigen Arbeiten in diesem Journal und zuletzt in meinen „Allg. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" diese Sätze dahin verallgemeinert, dass ich statt der das Integral $\int y\,dx = z$ definirenden Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

eine allgemeine nicht homogene lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung zu Grunde legte und die *Abel*schen Sätze umfassende, ziemlich allgemeine Theoreme über die Form der Integrale solcher Differentialgleichungen aufstellte, sofern sich dieselben durch algebraische Functionen oder durch Integrale mit algebraischen Grenzen darstellen lassen *). Im Folgenden beabsichtige ich diese Untersuchungen und somit auch die Sätze von *Abel* nach einer anderen Seite hin zu erweitern, auf welche ich bei der Behandlung der Frage geführt wurde, welche Transcendenten integrirt wieder in algebraischer Form auf dieselben Transcendenten zurückführen;

*) In einer demnächst in diesem Journal erscheinenden grösseren Arbeit werden diese Sätze zum vollständigen Abschluss gebracht, und die schon früher für specielle Fälle gefundenen Beziehungen zur Kreistheilung und complexen Multiplication der *Abel*schen Integrale allgemein entwickelt.

ich werde mich bei der Darstellung auf die Entwicklung derjenigen Punkte beschränken, welche zu dem in meinen früheren Untersuchungen ausgeführten wesentlich Neues hinzufügen, für das Weitere jedoch auf die von mir oben angeführten „Allgem. Untersuchungen“ verweisen.

Sei y_1 ein Integral der algebraischen Differentialgleichung

$$(1.)\quad y^{(m)^\lambda}+f_1(x, y, y', \dots y^{(m-1)})y^{(m)^{\lambda-1}}+\dots+f_\lambda(x, y, y', \dots y^{(m-1)}) = 0,$$

in welcher $f_1, f_2, \dots f_\lambda$ rationale Functionen bedeuten; sei ferner

$$\int f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})\,dx,$$

worin μ eine positive ganze Zahl und f eine algebraische Function bedeutet, welche durch die mit Adjungirung der Grössen $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}$ irreductible Gleichung

$$(2.)\quad f^\delta+g_1(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)})f^{\delta-1}+\dots+g_\delta(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}) = 0$$

definirt ist, algebraisch durch eben diese Transcendente und deren Ableitungen in der Form ausdrückbar

$$(3.)\quad \int f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})\,dx = F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}),$$

indem man die höheren Ableitungen von y_1 vermöge (1.) rational durch die niederen ausdrücken kann, so wird, wenn

$$(4.)\quad F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}) = Y_1$$

gesetzt wird, Y_1 die Lösung einer algebraischen Gleichung sein, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}$ zusammengesetzt sind und die wir, indem wir mit diesen Grössen noch $f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})$ selbst adjungiren, in irreductibler Form durch

$$(5.)\quad Y^p+F_1(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}, f)\,Y^{p-1}+\dots+F_p(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}, f) = 0$$

darstellen wollen. Da nun aus (3.) vermöge (4.) durch Differentiation

$$(6.)\quad f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)}) = \frac{dY_1}{dx}$$

folgt, sich ferner aber aus (5.) vermöge der Gleichungen (1.) und (2.) $\frac{dY_1}{dx}$ als rationale Function von $Y_1, x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}, f$ ergiebt, so wird (6.) eine algebraische Gleichung in Y_1 mit in $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}, f$ rationalen Coefficienten liefern und somit durch alle Lösungen der irreductibeln Gleichung (5.) befriedigt werden müssen, also, wenn Y_2 eine von Y_1 verschiedene Lösung derselben bezeichnet, auch

$$(7.)\quad f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)}) = \frac{dY_2}{dx}$$

sein. Da aber aus (6.) und (7.) folgt, dass Y_2 sich von Y_1 nur um eine

Constante unterscheiden kann, andererseits aber diese Beziehung zwischen zwei Lösungen einer irreductibeln Gleichung nie statthaben darf, so folgt, dass die Gleichung (5.) vom ersten Grade und daher Y_1 oder $F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)})$ rational durch x, y_1, y_1', $\dots$ $y_1^{(m)}$, f ausdrückbar sein muss; wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn für ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung die Quadratur über eine algebraische Function dieses Integrales, dessen Ableitungen und der unabhängigen Variabeln eine algebraische Function eben dieser Grössen ist, so lässt sich diese als rationale Function des Integrales, dessen Ableitungen, der unabhängigen Variabeln und der Basis der Quadratur darstellen.

Da die Differentiation der nun bestehenden Gleichung

$$(8.)\qquad \int f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})dx = \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}, f),$$

in welcher ω eine rationale Function bedeutet, mit Hülfe von (1.) und (2.) eine algebraische Gleichung in f liefert, deren Coefficienten denen von (2.) gleichartig sind, so werden vermöge der Irreductibilität der Gleichung (2.) auch alle Lösungen dieser der Gleichung (8.) genügen, und es wird sich somit der Satz ergeben:

Ist die Quadratur einer algebraischen Function des Integrales einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen in eben diesen Grössen algebraisch, also auch rational in diesen Grössen und der Basis der Quadratur ausdrückbar, so bleibt die Form des rationalen Ausdruckes der Quadratur bestehen, wenn statt der Basis irgend ein anderer Zweig dieser algebraischen Function gesetzt wird.

Es mag, was unmittelbar einzusehen ist, noch hinzugefügt werden, dass, wenn die Differentialgleichung (1.) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(m)}$ linear ist, stets eine Reduction auf eine rationale Function von x, y und nur den $m-1$ ersten Ableitungen dieser Transcendenten möglich ist.

Um nun das Verhalten anderer Integrale der Differentialgleichung (1.) zur Relation (3.) zu untersuchen, machen wir die Annahme, dass diese algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(m)}$ algebraisch irreductibel sei, und dass das Integral y_1 nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} genüge; leitet man dann aus der Gleichung (8.) durch Differentiation die Beziehung ab:

$$(9.)\quad f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)}) = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial\omega}{\partial y_1^{(m)}} y_1^{(m+1)} + \frac{\partial\omega}{\partial f}\frac{df}{dx},$$

denkt sich $y^{(m+1)}$ vermöge der Differentialgleichung (1.) rational durch die niederen Ableitungen ausgedrückt, ferner $\frac{df}{dx}$ als rationale Function von f mit Hülfe der Gleichung (2.) substituirt, endlich, wenn $f_1, f_2, \dots f_\delta$ die δ Lösungen der Gleichung (2.) bedeuten, das Product gebildet

$$(10.)\quad \prod_1^\delta{}_x \left\{ f_x(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)}) - \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y_1} y_1' - \dots - \frac{\partial\omega}{\partial y_1^{(m)}} y_1^{(m+1)} - \frac{\partial\omega}{\partial f_x}\frac{df_x}{dx} \right\} = 0,$$

so wird die linke Seite von (10.) als eine rationale symmetrische Function von $f_1, f_2, \dots f_\delta$ sich vermöge der Gleichung (2.) in einen in x, y_1 und dessen Ableitungen rationalen Ausdruck umgestalten lassen und daher nach einem bekannten Satze *) durch jedes Integral der Differentialgleichung (1.) befriedigt werden; wir erhalten somit, da in dem Producte (10.) für jedes andere Integral von (2.) nothwendig einer der Factoren Null werden muss, ausserdem aber nach dem vorigen Satze das Verschwinden eines Factors das aller übrigen Factoren nach sich zieht, den folgenden Satz:

*Wenn die Quadratur einer algebraischen Function des Integrales einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen sich durch eben dieses Integral und dessen Ableitungen algebraisch ausdrücken lässt, so wird unter der Voraussetzung, dass die Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, und das Integral nicht schon einer gleichartigen algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet, eben diese Quadratur für jeden Zweig ihrer Basis und für jedes Integral der algebraischen Differentialgleichung durch dieselbe **rationale** Function des Integrales der Differentialgleichung, dessen Ableitungen bis zur Ordnung der Differentialgleichung und des resp. Zweiges der Basis der Quadratur ausgedrückt werden können.*

Ist die Basis der Quadratur selbst eine rationale Function der Transcendenten und deren Ableitungen, so wird unter der gemachten Voraussetzung auch die Quadratur rational aus eben diesen Grössen zusammengesetzt sein; da aber jede rationale Function von x, y_1, y_1', $\dots$ $y_1^{(m)}$ sich vermöge der Gleichung (1.) als ganze Function $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grades in $y_1^{(m)}$ darstellen lässt, deren Coefficienten rational aus x, y_1, y_1', $\dots$ $y_1^{(m-1)}$ zusammengesetzt sind, so folgt, dass

*) s. meine „Allgem. Untersuchungen" Seite 5.

wenn die Quadratur einer rationalen Function eines Integrales der algebraischen Differentialgleichung (1.) *und dessen Ableitungen sich durch eben dieses Integral und dessen Ableitungen algebraisch ausdrücken lässt, dieselbe sich auch als eine ganze Function* $(\lambda-1)^{ten}$ *Grades in dem höchsten Differentialquotienten, deren Coefficienten rational aus dem Integral und den niederen Differentialquotienten zusammengesetzt sind, darstellen lassen wird, und, wenn die Differentialgleichung den oben gemachten Voraussetzungen unterliegt, so wird die Darstellung der Quadratur durch diese ganze Function für jedes Integral der Differentialgleichung bestehen bleiben.*

Aber die hergeleiteten Sätze bleiben nicht darauf beschränkt, dass die Quadratur

$$\int f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})\,dx$$

sich algebraisch durch y_1 und dessen Ableitungen ausdrücken lässt, sondern gelten auch, wie wir sehen werden, für den weit allgemeineren Fall, dass dieselbe durch eine beliebige Anzahl von particulären Integralen der Differentialgleichung (1.) und deren Ableitungen algebraisch darstellbar ist.

Denn sei

$$(11.)\quad \begin{cases} \int f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})\,dx \\ = F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}, y_2, y_2', \dots y_2^{(m)}, \dots y_\varrho, y_\varrho', \dots y_\varrho^{(m)}), \end{cases}$$

worin F eine algebraische Function, $y_1, y_2, \dots y_\varrho$ Integrale der Differentialgleichung (1.) bedeuten, so ist unmittelbar zu sehen, dass sich genau wie oben die rationale Darstellbarkeit der Function F in den ϱ Integralen, deren Ableitungen und der Basis der Quadratur herleiten lässt, und dass diese Darstellung auch für jeden Zweig der Function f erhalten bleibt; sei nun die der Gleichung (10.) analoge Beziehung

$$(12.)\quad \begin{cases} \prod_1^\delta{}_x \Big\{ f_x(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)}) - \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y_1} y_1' - \dots - \frac{\partial\omega}{\partial y_1^{(m)}} y_1^{(m+1)} - \dots \\ \qquad \dots - \frac{\partial\omega}{\partial y_\varrho} y_\varrho' - \dots - \frac{\partial\omega}{\partial y_\varrho^{(m)}} y_\varrho^{(m+1)} - \frac{\partial\omega}{\partial f_x} \frac{df_x}{dx} \Big\} = 0, \end{cases}$$

so liefert dieselbe einen algebraischen rationalen Zusammenhang zwischen den ϱ Integralen der Differentialgleichung (1.) und den Ableitungen derselben. Specialisirt man aber den von mir („Allg. Untersuchungen" § 5) gegebenen Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung für *eine* Differentialgleichung, so nimmt derselbe die folgende Form an:

Besteht zwischen particulären Integralen einer in Bezug auf den höchste Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung und dere Ableitungen eine algebraische Relation, und ist eines dieser Integrale derart, da es nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung genüg so bleibt die algebraische Relation erhalten, wenn man für dieses Integral e beliebiges anderes Integral dieser Differentialgleichung setzt, vorausgesetzt, da für die anderen passende Integrale eben derselben substituirt werden,

und wenn daher die Differentialgleichung (1.) sowie das Integral den oben gestellten Bedingungen unterliegt, so wird die Gleichung (12.) un daher mit Benutzung der oben gemachten Bemerkung auch die Gleichun (11.) bestehen bleiben, wenn man statt y_1 irgend ein anderes Integral de Differentialgleichung und auf der rechten Seite für $y_2, \dots y_\varrho$ passende In tegrale eben dieser substituirt. Fassen wir alles dies zusammen, so ergiel sich der folgende allgemeine Satz:

Wenn die Quadratur einer algebraischen Function des Integrales ein algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen sich durch eine A zahl ϱ von Integralen eben dieser Differentialgleichung und deren Ableitunge algebraisch ausdrücken lässt, so wird sich unter der Voraussetzung, dass d Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten alg braisch irreductibel ist und das in der Basis vorkommende Integral nicht sch einer gleichartigen algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung ang hört, eben diese Quadratur für jeden Zweig ihrer Basis und für jede Integral der algebraischen Differentialgleichung durch dieselbe rational Function von ϱ Integralen der Differentialgleichung, deren Ableitungen und de resp. Zweige der Basis der Quadratur ausdrücken lassen.

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass dieser Satz auc keine Aenderung erleidet, wenn die Basis der Quadratur eine algebraiscl Function von beliebig vielen Integralen der Differentialgleichung (1.) ur deren Ableitungen ist; der Fall, dass in der Basis der Quadratur Integra verschiedener Differentialgleichungen enthalten sind, wird in der unmittelba folgenden Untersuchung eingeschlossen sein, welche die hier für eine Qu dratur, d. h. für die Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnu

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)})$$

gewonnenen Resultate auf beliebige lineare nicht homogene Differentialgle chungen übertragen soll.

Sei die lineare nicht homogene Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung gegeben

$$(13.)\quad \begin{cases} z^{(\mu)}+f_1(x,\,Y_1,\,Y_1',\dots Y_2,\,Y_2',\dots Y_\varrho,\,Y_\varrho',\dots)z^{(\mu-1)}+\cdots \\ \cdots+f_\mu(x,\,Y_1,\,Y_1',\dots Y_2,\,Y_2',\dots Y_\varrho,\,Y_\varrho',\dots)z \;=\; f(x_1,\,Y_1,\,Y_1',\dots Y_\varrho,\,Y_\varrho'), \end{cases}$$

in welcher $f_1,\,f_2,\,\dots f_\mu,\,f$ algebraische Functionen bedeuten, und $Y_1,\,Y_2,\,\dots Y_\varrho$ Integrale algebraischer Differentialgleichungen von der $m_1,\,m_2,\,\dots m_\varrho^{\text{ten}}$ Ordnung

$$(14.)\quad \begin{cases} Y^{(m_1)\lambda_1}+F_{11}(x,Y,Y',\dots Y^{(m_1-1)})\,Y^{(m_1)\lambda_1-1}+\cdots+F_{1\lambda_1}(x,Y,Y',\dots Y^{(m_1-1)})=0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Y^{(m_\varrho)^{\lambda_\varrho}}+F_{\varrho 1}(x,Y,Y',\dots Y^{(m_\varrho-1)})Y^{(m_\varrho)^{\lambda_\varrho-1}}+\cdots+F_{\varrho\lambda_\varrho}(x,Y,Y',\dots Y^{(m_\varrho-1)})=0 \end{cases}$$

darstellen, wenn $F_{\alpha\beta}$ rationale Functionen sind, und besitze die Differentialgleichung (13.) ein in $x,\,Y_1,\,Y_2,\dots Y_\varrho$ und deren Ableitungen algebraisches Integral z_1, welches durch die mit Adjungirung der Grössen

$$x,\;Y_1,\;Y_1',\;\dots\;Y_1^{(m_1)},\;\dots\;Y_\varrho,\;Y_\varrho',\;\dots\;Y_\varrho^{(m_\varrho)}$$

und der algebraischen Functionen $f_1,\,f_2,\,\dots f_\lambda,\,f$ irreductible Gleichung definirt sein mag

$$(15.)\quad \begin{cases} z^\nu+\varphi_1(x,\,Y_1,\,Y_1',\dots Y_1^{(m_1)},\dots Y_\varrho,\,Y_\varrho',\dots Y_\varrho^{(m_\varrho)},f_1,\dots f_\lambda,f)z^{\nu-1}+\cdots \\ \qquad\cdots+\varphi_\nu(x,\,Y_1,\,Y_1',\dots Y_\varrho,\,Y_\varrho',f_1,\dots f_\varrho,f) \;=\; 0, \end{cases}$$

so wird sich $\frac{dz_1}{dx},\;\frac{d^2z_1}{dx^2},\;\dots\;\frac{d^\mu z_1}{dx^\mu}$ aus (15.) mit Hülfe der Gleichungen (14.) und der die Functionen $f_1,\,f_2,\,\dots f_\varrho,\,f$ definirenden algebraischen Gleichungen als rationale Functionen von $z_1,\,x,\,Y_1,\,\dots Y_1^{(m_1)},\,\dots Y_\varrho,\,\dots Y_\varrho^{(m_\varrho)}$, $f_1,\,\dots f_\varrho,\,f$ ergeben, und diese Werthe in (13.) eingesetzt liefern daher eine algebraische Gleichung in z_1 mit Coefficienten, welche denen von (15.) gleichartig sind, die somit durch alle Lösungen von (15.) befriedigt wird; seien die Lösungen von (15.) $z_1,\,z_2,\,\dots z_\nu$, so werden somit bekannten Schlüssen zufolge diese Werthe Integrale der Differentialgleichung (13.) sein, diese daher auch durch

$$(16.)\quad \frac{1}{\nu}(z_1+z_2+\cdots+z_\nu) = -\frac{1}{\nu}\varphi(x,\,Y_1,\,Y_1',\dots Y_1^{(m_1)},\dots Y_\varrho,\,Y_\varrho',\dots Y_\varrho^{(m_\varrho)},f_1,\dots f_\varrho,f)$$

erfüllt sein, welches rational aus $Y_1,\,\dots Y_\varrho$, deren Ableitungen und den Coefficienten der linearen Differentialgleichung zusammengesetzt ist. Da aber (13.) nur dann ein constantes Integral C haben kann, wenn dieselbe durch die Substitution $z-C=Z$ in eine *homogene* lineare übergeht —

welchen Fall wir ausschliessen dürfen — so erhalten wir den folgenden ganz allgemeinen Satz:

Wenn eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von Integralen algebraischer Differentialgleichungen sind, ein in diesen Integralen und deren Ableitungen algebraisches Integral besitzt, so existirt auch ein in diesen Integralen, deren Ableitungen und den Coefficienten der Differentialgleichung rationales Integral; es existirt also auch ein in den Integralen und deren Ableitungen selbst rationales Integral, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung rational aus diesen zusammengesetzt sind.

Da nun bekanntlich stets eine algebraische Function

$$\omega(x, Y_1, Y_1', \dots Y_2, Y_2', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots)$$

existirt, durch welche die $\varrho+1$ algebraischen Functionen $f_1, \dots f_\varrho, f$ von $x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho'$ mit Hülfe eben dieser Grössen *rational* ausgedrückt werden können, so kann der vorige Satz auch folgendermassen ausgesprochen werden:

Wenn eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von Integralen algebraischer Differentialgleichungen sind, ein in diesen Integralen und deren Ableitungen algebraisches Integral besitzt, so existirt auch ein Integral der Differentialgleichung, welches sich rational zusammensetzt aus eben diesen Integralen, deren Ableitungen und einer algebraischen Function dieser Grössen, welche eine solche lineare Verbindung der Coefficienten der Differentialgleichung darstellt, durch welche alle diese Coefficienten rational ausdrückbar sind.

Mag diese Hülfsfunction der irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(17.)\quad \omega^q+\omega_1(x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots)\omega^{q-1}+\dots+\omega_q(x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots) = 0$$

genügen, in welcher $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_q$ rationale Functionen bedeuten, so wird also ein Integral der Differentialgleichung (13.) von der Form existiren

$$(18.)\quad z = \Omega(x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots \omega),$$

worin Ω eine rationale Verbindung darstellt, und dieser Werth in die Differentialgleichung eingesetzt wird dieselbe in eine ganze Function von ω mit Coefficienten, welche denen von (17.) gleichartig sind, verwandeln, so dass sämmtliche Lösungen von (17.) auch dieser Gleichung genügen werden, und daher der Satz folgt,

dass die Form des Integrales (18.) *erhalten bleibt für alle linearen Differentialgleichungen* (13.), *die aus der gegebenen entstehen, wenn für die*

Coefficienten $f_1, f_2, \dots f_\varrho, f$ diejenigen algebraischen Functionen von x, Y_1, Y_1', ... Y_ϱ, Y_ϱ', ... gesetzt werden, welche sich aus den rationalen Ausdrücken dieser Functionen durch ω vermöge der Substitution irgend einer anderen Lösung der Gleichung (17.) *ergeben.*

Will man die Coefficienten der linken Seite der linearen Differentialgleichung (13.) beibehalten und nur die rechte Seite derselben ändern, so kann man die rechte Seite f als die Lösung einer algebraischen Gleichung auffassen, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots f_1, f_2, \dots f_\varrho$ zusammengesetzt sind und die mit Adjungirung eben dieser Grössen irreductibel ist; da nun ein Integral existirt, welches eine rationale Function aller Coefficienten der Differentialgleichung ist, so wird sich durch Einsetzen desselben in diese eine rationale Gleichung in f ergeben, welche durch alle Lösungen der oben gebildeten befriedigt werden muss,

so dass alle nicht homogenen linearen Differentialgleichungen, welche aus der gegebenen hervorgehen, indem man für die rechte Seite jede Lösung der in f gebildeten algebraischen Gleichung setzt, gleichartige Integrale besitzen, die in der angegebenen Weise aus einander entstehen.

Sei nun die nicht homogene lineare Differentialgleichung gegeben

$$(19.)\quad \begin{cases} z^{(\mu)}+f_1(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)})z^{(\mu-1)}+\dots+f_\mu(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)})z \\ \qquad = f(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)}), \end{cases}$$

in welcher $f_1, f_2, \dots f_\mu$ rationale, f eine algebraische Function und Y_1 ein Integral der im höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(20.)\quad Y^{(m)^\lambda}+F_1(x, Y, Y', \dots Y^{(m-1)})Y^{(m)^{\lambda-1}}+\dots+F_\lambda(x, Y, Y', \dots Y^{(m-1)}) = 0$$

sein soll, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört; besitze ferner die lineare Differentialgleichung (19.) ein algebraisch aus x, Y_1 und dessen Ableitungen zusammengesetztes Integral, so giebt es nach den vorigen Sätzen auch ein in x, Y_1, dessen Ableitungen und $f(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)})$ rational zusammengesetztes Integral, und wird dieses wieder in (19.) eingesetzt, so erhält man eine algebraische rationale Gleichung in f, welche dadurch rational gemacht wird, dass man f alle Zweige der sie definirenden irreductibeln Gleichung durchlaufen lässt und das Product der so entstehenden Ausdrücke bildet. Dadurch ergiebt sich aber eine rationale Gleichung in Y_1, Y_1', ... $Y_1^{(m)}$, welche bekanntlich durch alle Integrale der Y_1 definirenden Differentialgleichung (20.) befrie-

digt werden muss; da aber nach dem vorigen Satze, wenn die Differentialgleichung für einen Zweig von f befriedigt ist, derselben durch die gleichartige Function für alle Zweige genügt wird, so ergiebt sich der nachfolgende Satz:

Wenn eine nicht lineare homogene Differentialgleichung

$$z^{(\mu)}+f_1(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)})z^{(\mu-1)}+\dots+f_\mu(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)})z = f(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)}),$$

in welcher $f_1, f_2, \dots f_\mu$ *rationale Functionen,* f *eine algebraische Function bedeuten, ferner* Y_1 *ein Integral einer in dem höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung*

$$F(x, Y, Y', \dots Y^{(m)}) = 0$$

vorstellt, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört, ein in $x, Y_1, Y_1', \dots$ *algebraisch ausdrückbares Integral besitzt, so hat sie auch ein in* $x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)}$ *und* $f(x, Y_1, Y_1', \dots Y_1^{(m)})$ *rationales Integral, und dieser letztere Ausdruck bleibt ein Integral, wenn man in der Differentialgleichung und im Integralausdrucke für* f *irgend einen anderen Zweig dieser Function und statt* Y_1 *irgend ein anderes Integral der Differentialgleichung* $F = 0$ *substituirt.*

Nachdem wir gezeigt haben, wie aus der Existenz eines in $x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots$ algebraischen Integrales einer nicht linearen homogenen Differentialgleichung (13.) auf die Existenz eines in den Coefficienten dieser Differentialgleichung rationalen Integrales geschlossen werden kann, wollen wir nunmehr unter gewissen Voraussetzungen die Form eines *jeden* in jenen Grössen algebraischen Integrales untersuchen. Nachdem oben gezeigt worden, dass jede Lösung der Gleichung (15.) ein Integral der Differentialgleichung (13.) ist, folgt unmittelbar, dass, wenn zwei jener Lösungen mit z_1 und z_2 bezeichnet werden, $z_1 - z_2$ ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(21.)\quad z^{(\mu)}+f_1(x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots)z^{(\mu-1)}+\dots+f_\mu(x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots)z = 0$$

ist, und zwar ein in den Grössen $x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots$ algebraisch ausdrückbares Integral. Nehmen wir nun an, dass die reducirte Differentialgleichung (21.) gar keine algebraisch aus diesen Grössen zusammengesetzten Integrale besitzt, oder nur solche, welche rational durch diese Grössen und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind, so muss

$$z_1 - z_2 = 0 \quad \text{oder} \quad z_1 - z_2 = \omega(x, Y_1, Y_1', \dots Y_\varrho, Y_\varrho', \dots f_1, \dots f_\varrho, f)$$

sein, worin ω eine rationale Function bedeutet, was jedoch in beiden

Fällen nach bekannten Eigenschaften irreductibler algebraischer Gleichungen mit der Gleichung (15.) nicht vereinbar ist; es ergiebt sich somit der folgende Satz:

Hat eine nicht homogene lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen sind, ein in diesen Integralen und deren Ableitungen algebraisches Integral, so muss sich dieses als rationale Function eben dieser Grössen und der Coefficienten der Differentialgleichung darstellen lassen, vorausgesetzt, dass die reducirte Differentialgleichung gar kein algebraisches Integral der Art oder nur in den Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung rational ausdrückbare Integrale besitzt.

Lässt sich die Quadratur einer algebraischen Function des Integrales einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen auf den Logarithmus einer eben solchen Function reduciren, ist also

$$\int f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(\mu)})\, dx = \log F(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m)}),$$

so werden offenbar ganz ähnliche Schlüsse zeigen, *dass eben diese Quadratur auch durch den mit einer Constanten multiplicirten Logarithmus einer in y_1, dessen Ableitungen und der Basis der Quadratur rational ausdrückbaren Function dargestellt werden kann,* und ebenso allgemeiner, *dass, wenn jene Quadratur durch elliptische und Abelsche Integrale ausdrückbar ist, deren Grenzen algebraische Functionen von y_1 und dessen Ableitungen sind, ebensolche Integrale mit Grenzen, welche Gleichungen genügen, deren Coefficienten rational aus y_1, dessen Ableitungen und der Basis der Quadratur zusammengesetzt sind, an die Stelle treten werden,*

und genau so lassen sich die im § 11 und § 14 meiner „Allgem. Untersuchungen“ für lineare nicht homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten ausgeführten Untersuchungen auf den Fall der Differentialgleichungen übertragen, deren Coefficienten algebraisch aus Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen zusammengesetzt sind.

Es sind somit die *Abel*schen Sätze nach zwei Seiten hin erweitert, indem einerseits statt der algebraischen Function der unabhängigen Variabeln unter dem Integralzeichen eine solche Function von Integralen beliebiger algebraischer Differentialgleichungen gesetzt ist, andererseits an Stelle der Quadratur selbst das Integral einer allgemeinen nicht homogenen linearen

Differentialgleichung getreten ist, für welche die Untersuchungen und die den *Abel*schen analogen Sätze wiederum nach zwei Richtungen hin erweitert werden konnten.

Es soll nun im Folgenden, um die Anwendbarkeit dieser Principien und Sätze zu zeigen, eine Frage erörtert werden, welche ich in den einfachsten Fällen bereits in meinen „Allgemeinen Untersuchungen" behandeln konnte, und die ich nunmehr hier in ihrer ganzen Allgemeinheit angreifen will.

Es ist aus den Elementen der Integralrechnung bekannt, dass man ausgedehnte Klassen von Integralen, für welche die Function unter dem Integral die Transcendenten

$$e^x, \quad \sin x, \quad \log x, \quad \arcsin x, \quad \text{u. s. w.}$$

in algebraischer Weise mit x verbunden enthält, ausführen, d. h. auf algebraische Functionen von x und der unter dem Integral vorkommenden Transcendenten zurückführen kann; ich habe ferner im § 2 meiner „Allgemeinen Untersuchungen" die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass

$$e^{\int y dx} \quad \text{und} \quad \int e^{\int y dx} dx,$$

worin y eine algebraische Function von x bedeutet, zu einander in einer algebraischen Beziehung stehen, oder anders ausgedrückt, wann die Quadratur

$$\int z dx$$

algebraisch durch x und z ausgedrückt werden kann, wenn z das Integral der linearen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = yz$$

ist — ich will mich nunmehr mit der Aufgabe beschäftigen, die Beschaffenheit aller derjenigen Transcendenten anzugeben, deren Integral sich als eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln und eben dieser Transcendenten darstellen lässt.

Sei y_1 eine transcendente Function, für welche

$$(22.) \qquad \int y_1 dx = F(x, y_1)$$

ist, wenn F eine algebraische Function bedeutet, so ist aus der der Gleichung (22.) zugehörigen Differentialgleichung

$$(23.) \qquad y_1 = \frac{\partial F(x, y_1)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y_1)}{\partial y_1} y_1'$$

unmittelbar zu ersehen,

dass jede Transcendente der angegebenen Eigenschaft das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss, somit einer irreductibeln Differentialgleichung höherer Ordnung nicht angehören kann.

Die Gleichung (23.) kann, in Bezug auf x und y_1 rational gemacht, mit Adjungirung von x und y_1 in Bezug auf y_1' reductibel sein; sei die algebraisch irreductible Gleichung, die y_1, y_1' zur Lösung hat,

$$(24.)\qquad y'^{\lambda}+f_1(x,y)y'^{\lambda-1}+\cdots+f_\lambda(x,y) = 0,$$

so wird einerseits jedes Integral der Differentialgleichung (24.) der Gleichung (23.) für einen Zweig von F genügen, also auch die durch (22.) definirte Eigenschaft besitzen, andererseits wird, wenn die Transcendente y_1 das Integral irgend einer — nach dem Früheren selbstverständlich reductibeln — Differentialgleichung höherer Ordnung

$$(25.)\qquad F_1(x,y,y',y'',\dots y^{(m)}) = 0$$

war, weil (24.) in Bezug auf y' algebraisch irreductibel und das den Differentialgleichungen (24.) und (25.) gemeinsame Integral y_1 nicht algebraisch sein sollte, jedes Integral von (24.) auch (25.) genügen müssen, und es folgt somit,

dass, wenn ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung höherer Ordnung die Eigenschaft hat, dass die über dasselbe genommene Quadratur sich algebraisch durch eben dieses Integral ausdrücken lässt, noch eine einfache Unendlichkeit anderer particulärer Integrale jener Differentialgleichung die Eigenschaft hat, dass ihre Quadratur durch einen Zweig derselben algebraischen Function des resp. Integrales ausdrückbar ist, und zwar werden alle diese Integrale die Gesammtheit der Integrale einer in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung bilden.

Dass es unendlich viele Differentialgleichungen beliebiger Ordnung giebt, für welche die Quadratur eines ihrer Integrale algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar ist, lässt sich unmittelbar einsehen, indem unter der Annahme einer willkürlichen algebraischen Function $F(x,y)$ von x und y die Differentialgleichung

$$(26.)\qquad y = \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'$$

nur Integrale definirt, deren Quadratur eine algebraische Function von x und y nämlich

$$(27.)\qquad \int y\,dx = F(x,y)$$

ist, und offenbar werden alle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung,

die durch Differentiation von (26.) entstehen, oder noch allgemeiner ausgedrückt, alle Differentialgleichungen höherer Ordnung und höheren Grades, die zu einem ihrer Integrale erster Ordnung die Gleichung (26.) haben, Integrale besitzen, deren Quadratur algebraisch durch dieses Integral ausdrückbar ist.

Beschäftigen wir uns zuerst mit den Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(28.)\quad f(x, y, y') = 0,$$

welche wir gleich in Bezug auf y' als algebraisch irreductibel voraussetzen wollen, und die für ein nicht algebraisches Integral y_1 die Eigenschaft haben sollen, dass

$$(29.)\quad \int y_1 dx = F(x, y_1)$$

ist, so wird nach den oben bewiesenen Sätzen folgen, dass auch

$$(30.)\quad \int y_1 dx = F_1(x, y_1, y_1')$$

sein muss, wenn F_1 eine *rationale* Function bedeutet, und dass diese Beziehung in

$$(31.)\quad \int y_1 dx = \varphi(x, y_1),$$

worin φ ebenfalls rational ist, übergeht, wenn die Differentialgleichung (28.) y' als rationale Function von x und y definirt; zugleich ist ersichtlich, dass alle Integrale der Differentialgleichung (28.) den Beziehungen (30.), (31.) Genüge leisten. Sei die Differentialgleichung (28.) die lineare erster Ordnung

$$(32.)\quad y' = f_1 y + f_2,$$

worin f_1 und f_2 algebraische Functionen von x bedeuten, und suchen wir die Bedingungen, unter denen die Quadratur eines Integrales derselben algebraisch, also rational, durch eben dieses in der Form (31.) darstellbar ist, so wird, weil das allgemeine Integral von (32.) durch

$$(33.)\quad y = ce^{\int f_1 dx} + y_1$$

dargestellt wird und dieses auch der Gleichung (31.) genügen muss,

$$\int (ce^{\int f_1 dx} + y_1) dx = \varphi(x, ce^{\int f_1 dx} + y_1)$$

und vermöge (31.) auch

$$(34.)\quad c\int e^{\int f_1 dx} dx = \varphi(x, ce^{\int f_1 dx} + y_1) - \varphi(x, y_1)$$

sein, was auch c sein mag. Da nun die durch Differentiation nach c sich ergebende Gleichung

$$\frac{\partial\varphi(x, ce^{\int f_1 dx}+y_1)}{\partial(ce^{\int f_1 dx}+y_1)} = e^{-\int f_1 dx}\int e^{\int f_1 dx}dx$$

zeigt, dass der links stehende Differentialquotient von c, also auch vom ganzen zweiten Argument unabhängig ist, so folgt

$$\varphi(x, y_1) = P_1 y_1 + P_2,$$

worin P_1 und P_2 algebraische Functionen von x sind, und der Ausdruck für die Quadratur muss somit die Form haben

$$(35.)\quad \int y_1 dx = P_1 y_1 + P_2$$

also eine lineare Function des Integrales sein. Wir können aber auch leicht die Bedingungen ermitteln, unter denen die lineare Differentialgleichung (32.) die durch die Gleichung (35.) ausgedrückte Eigenschaft besitzt; denn da aus (35.) durch Differentiation vermöge (32.)

$$(36.)\quad y_1 = P_1 y_1' + P_1' y_1 + P_2' = P_1(f_1 y_1 + f_2) + P_1' y_1 + P_2'$$

folgt, und y_1 nicht algebraisch sein sollte, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$(37.)\quad P_1' + P_1 f_1 = 1 \quad \text{und} \quad P_1 f_2 + P_2' = 0,$$

d. h. es muss die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' + f_1 z = 1$$

ein algebraisches Integral P_1 besitzen, und es muss das *Abel*sche Integral

$$\int P_1 f_2 dx$$

sich auf eine algebraische Function $-P_2$ reduciren lassen, und umgekehrt sieht man leicht, dass, wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, aus der Gleichung (37.) sich die zweite Form von (36.) identisch für alle y_1 ergiebt, und dass diese Gleichung, wenn y_1 irgend ein Integral der linearen Differentialgleichung (32.) vorstellt, in die erste Form von (36.), d. h. in (35.) übergeht; wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f_1 y + f_2$$

die Eigenschaft besitzt, dass die Quadratur eines, also auch aller ihrer Inte-

grale algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar ist, sind die, dass die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$z'+f_1 z = 1$$

ein algebraisches Integral P_1 besitzt und dass das Abelsche Integral

$$\int P_1 f_2 \, dx$$

auf eine algebraische Function $-P_2$ von x reducirbar ist, und in diesem Falle ist die Quadratur selbst eine lineare Function des Integrales von der Form

$$\int y \, dx = P_1 y + P_2.$$

Ich untersuche noch mit Rücksicht auf das Folgende diejenige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, welche aus der linearen Differentialgleichung

$$(38.) \qquad Y' = f_1 Y + f_2$$

durch Anwendung der ganzen Substitution

$$(39.) \qquad y = F_0 + F_1 Y + F_2 Y^2 + \cdots + F_\varkappa Y^\varkappa,$$

worin $F_0, F_1, \ldots F_\varkappa$ algebraische Functionen von x bedeuten, entstanden sind und sich also durch Elimination von Y zwischen (39.) und der Ableitung dieser Gleichung

$$y' = F_0' + f_2 F_1 + (F_1' + f_1 F_1 + 2 f_2 F_2) Y + (F_2' + 2 f_1 F_2 + 3 f_2 F_3) Y^2 + \cdots$$
$$\cdots + (F_\varkappa' + \varkappa f_1 F_\varkappa) Y^\varkappa$$

in der Form

$$(40.) \qquad F(x, y, y') = 0$$

ergeben, die in Bezug auf y' algebraisch irreductibel sein mag. Angenommen nun, es sei für ein Integral y_1 der Gleichung (40.)

$$(41.) \qquad \int y_1 dx = f(x, y_1),$$

worin f eine algebraische Function bedeutet, also

$$(42.) \quad \int (F_0 + F_1 Y_1 + F_2 Y_1^2 + \cdots + F_\varkappa Y_1^\varkappa) dx = f(x, F_0 + F_1 Y_1 + F_2 Y_1^2 + \cdots + F_\varkappa Y_1^\varkappa),$$

so muss, wie wir wissen, dieselbe Beziehung für das allgemeine Integral von (40.), also für das dem allgemeinen Integral von (38.) entsprechende Y bestehen, so dass die Beziehung folgt

$$(43.) \quad \int [F_0 + F_1 (Y_1 + c e^{\int f_1 dx}) + \cdots + F_\varkappa (Y_1 + c e^{\int f_1 dx})^\varkappa] dx$$
$$= f(x, F_0 + F_1 (Y_1 + c e^{\int f_1 dx}) + \cdots + F_\varkappa (Y_1 + c e^{\int f_1 dx})^\varkappa).$$

Da sich die linke Seite als eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades in der willkürlichen Constanten c darstellt, so wird die rechte Seite $\varkappa$-mal nach einander nach c differentiirt einen von c unabhängigen Werth liefern müssen; bezeichnet man aber die rechte Seite von (42.) mit $\psi(Y_1)$, so wird

$$\frac{d\psi(Y_1+ce^{\int f_1 dx})}{dc} = \psi'.e^{\int f_1 dx}, \quad \frac{d^2\psi(Y_1+ce^{\int f_1 dx})}{dc^2} = \psi''.e^{2\int f_1 dx}, \quad \dots,$$

und es wird somit

$$\psi^{(\varkappa)}e^{\varkappa\int f_1 dx}$$

von c, also auch von $Y_1+ce^{\int f_1 dx}$ unabhängig, also $\psi(Y_1)$ eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades in Y_1 sein, so dass die Gleichung (42.) in

$$(44.)\qquad \int(F_0+F_1Y_1+\dots+F_\varkappa Y_1^\varkappa)dx = \omega_0+\omega_1Y_1+\omega_2Y_1^2+\dots+\omega_\varkappa Y_1^\varkappa$$

übergeht, worin $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_\varkappa$ algebraische Functionen von x bedeuten. Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar durch Differentiation

$$(45.)\qquad \begin{cases} F_0+F_1Y_1+F_2Y_1^2+\dots+F_\varkappa Y_1^\varkappa \\ = (\omega_0'+f_2\omega_1)+(\omega_1'+f_1\omega_1+2f_2\omega_2)Y_1+(\omega_2'+2f_1\omega_2+3f_2\omega_3)Y_1^2+\cdots \\ \cdots+(\omega_{\varkappa-1}'+(\varkappa-1)f_1\omega_{\varkappa-1}+\varkappa f_2\omega_\varkappa)Y_1^{\varkappa-1}+(\omega_\varkappa'+\varkappa f_1\omega_\varkappa)Y_1^\varkappa, \end{cases}$$

und da y_1, also auch Y_1 nicht algebraische Functionen von x sein sollten, also diese Gleichung eine identische sein muss, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$(46.)\qquad \begin{cases} \omega_\varkappa'+\varkappa f_1\omega_\varkappa = F_\varkappa, \quad \omega_{\varkappa-1}'+(\varkappa-1)f_1\omega_{\varkappa-1} = F_{\varkappa-1}-\varkappa f_2\omega_\varkappa, \\ \omega_{\varkappa-2}'+(\varkappa-2)f_1\omega_{\varkappa-2} = F_{\varkappa-2}-(\varkappa-1)f_2\omega_{\varkappa-1}, \quad \dots \quad \omega_1'+f_1\omega_1 = F_1-2f_2\omega_2, \\ \omega_0' = F_0-f_2\omega_1, \end{cases}$$

in denen $f_1, f_2, F_0, F_1, \dots F_\varkappa$ als algebraische Functionen diesen $\varkappa+1$ Bedingungen gemäss zu bestimmen sind, d. h. so, dass die durch diese Bedingungen definirten Functionen $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_\varkappa$ algebraische Functionen von x sind; umgekehrt ist einleuchtend, dass, wenn den Bedingungen (46.) Genüge geschieht, die Gleichung (45.) für ein willkürliches Y_1 befriedigt wird, und dass diese Gleichung unter der Annahme, dass Y_1 ein Integral der Differentialgleichung (38.) ist, die Beziehung (44.) für die Quadratur nach sich zieht. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine aus der linearen Differentialgleichung

$$Y' = f_1Y+f_2$$

durch die ganze algebraische Substitution in Y

$$(\alpha.)\qquad y = F_0+F_1 Y+F_2 Y^2+\cdots+F_\varkappa Y^\varkappa$$

abgeleitete, in y' *algebraisch irreductible Differentialgleichung*

$$F(x, y, y') = 0$$

die Eigenschaft hat, dass die Quadratur über ein nicht algebraisches Integral derselben, also auch über jedes ihrer Integrale genommen, durch eben dieses Integral algebraisch ausdrückbar ist, sind die, dass die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\omega'_\varkappa+\varkappa f_1\omega_\varkappa = F_\varkappa,\quad \omega'_{\varkappa-1}+(\varkappa-1)f_1\omega_{\varkappa-1} = F_{\varkappa-1}-\varkappa f_2\omega_\varkappa,$$

$$\omega'_{\varkappa-2}+(\varkappa-2)f_1\omega_{\varkappa-2} = F_{\varkappa-2}-(\varkappa-1)f_2\omega_{\varkappa-1},\quad \ldots\quad \omega'_1+f_1\omega_1 = F_1-2f_2\omega_2$$

algebraische Integrale besitzen, und das Abelsche Integral

$$\omega_0 = \int(F_0-f_2\omega_1)dx$$

auf eine algebraische Function reducirbar sei; in diesem Falle ist die Quadratur selbst eine ganze Function $\varkappa^{ten}$ *Grades in* Y *von der Form*

$$\int y dx = \omega_0+\omega_1 Y+\omega_2 Y^2+\cdots+\omega_\varkappa Y^\varkappa,$$

die mit $(\alpha.)$ *zusammengestellt durch Elimination von* Y *den gesuchten algebraischen Ausdruck in* x *und* y *für die gegebene Quadratur liefert.*

Es mag endlich noch diejenige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung untersucht werden, welche aus der linearen homogenen Differentialgleichung

$$(47.)\qquad Y' = f_1 Y$$

durch Anwendung der Substitution

$$(48.)\qquad y = F_0 Y^{\alpha_0}+F_1 Y^{\alpha_1}+\cdots+F_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa},$$

worin $F_0, F_1, \ldots F_\varkappa$ algebraische Functionen von x, und $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\varkappa$ beliebige positive oder negative rationale Zahlen bedeuten, entstanden sind und sich also durch Elimination von Y zwischen (48.) und der Ableitung dieser Gleichung

$$(49.)\qquad y' = (F'_0+\alpha_0F_0f_1)Y^{\alpha_0}+(F'_1+\alpha_1F_1f_1)Y^{\alpha_1}+\cdots+(F'_\varkappa+\alpha_\varkappa F_\varkappa f_1)Y^{\alpha_\varkappa}$$

in der Form

$$(50.)\qquad F(x, y, y') = 0$$

ergeben, die wieder in Bezug auf y' algebraisch irreductibel sein mag. Angenommen, es bestehe für ein Integral y_1 der Gleichung (50.) die Beziehung

$$(51.)\qquad \int y_1 dx = f(x, y_1),$$

so wissen wir aus dem Vorigen, dass auch

$$\int y_1 dx = \varphi(x, y_1, y_1')$$

sein muss, worin φ eine rationale Function bedeutet, und daraus ergiebt sich mit Berücksichtigung der Gleichungen (48.) und (49.)

$$(52.)\quad \begin{cases} \int (F_0 Y_1^{\alpha_0} + F_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa}) dx \\ = \varphi(x, F_0 Y_1^{\alpha_0} + F_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa}, (F_0' + \alpha_0 F_0 f_1) Y_1^{\alpha_0} + \cdots + (F_\varkappa' + \alpha_\varkappa F_\varkappa f_1) Y_1^{\alpha_\varkappa}); \end{cases}$$

da diese Gleichung aber wiederum nach früheren Auseinandersetzungen auch für das allgemeine Integral der Gleichung (47.) bestehen muss, also auch für ein willkürliches c die Beziehung gilt

$$(53.)\quad \begin{cases} \int (c^{\alpha_0} F_0 Y_1^{\alpha_0} + c^{\alpha_1} F_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + c^{\alpha_\varkappa} F_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa}) dx \\ = \varphi(x, c^{\alpha_0} F_0 Y_1^{\alpha_0} + c^{\alpha_1} F_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + c^{\alpha_\varkappa} F_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa}, \\ c^{\alpha_0}(F_0' + \alpha_0 F_0 f_1) Y_1^{\alpha_0} + \cdots + c^{\alpha_\varkappa}(F_\varkappa' + \alpha_\varkappa F_\varkappa f_1) Y_1^{\alpha_\varkappa}), \end{cases}$$

so ist, weil φ eine rationale Function bedeutet, unmittelbar zu sehen, dass die rechte Seite sich auch als Polynom in c mit den einzelnen Potenzen $c^{\alpha_0}, c^{\alpha_1}, \ldots c^{\alpha_\varkappa}$ ordnen lassen muss; da aber c^{α_ϱ} stets mit $Y_1^{\alpha_\varrho}$ verbunden vorkommt, andererseits die Gleichung (53.) für jedes c, also auch für $c = 1$ gültig ist, so folgt

$$(54.)\quad \int (F_0 Y_1^{\alpha_0} + F_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa}) dx = \omega_0 Y_1^{\alpha_0} + \omega_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + \omega_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa}.$$

Differentiirt man nun diese Gleichung, so erhält man mit Benutzung von (47.)

$$(55.)\quad \begin{cases} F_0 Y_1^{\alpha_0} + F_1 Y_1^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y_1^{\alpha_\varkappa} \\ = (\omega_0' + \alpha_0 \omega_0 f_1) Y_1^{\alpha_0} + (\omega_1' + \alpha_1 \omega_1 f_1) Y_1^{\alpha_1} + \cdots + (\omega_\varkappa' + \alpha_\varkappa \omega_\varkappa f_1) Y_1^{\alpha_\varkappa}, \end{cases}$$

und da Y_1 keine algebraische Function sein soll, die Bedingungsgleichungen

$$(56.)\quad \omega_0' + \alpha_0 f_1 \omega_0 = F_0, \quad \omega_1' + \alpha_1 f_1 \omega_1 = F_1, \quad \ldots \quad \omega_\varkappa' + \alpha_\varkappa f_1 \omega_\varkappa = F_\varkappa,$$

in denen $\alpha_0, \ldots \alpha_\varkappa$ und $f_1, F_0, F_1, \ldots F_\varkappa$ als algebraische Functionen so zu bestimmen sind, dass die Differentialgleichungen (56.) für $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_\varkappa$ algebraische Integrale liefern, und umgekehrt leuchtet wieder ein, dass, wenn die Bedingungen (56.) befriedigt werden, der Gleichung (55.) für ein beliebiges Y_1, und somit für ein Integral der Differentialgleichung (47.) der Gleichung (54.), also auch (51.) Genüge geschieht; es ergiebt sich somit der Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine aus der linearen homogenen Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y$$

durch die algebraische Substitution

$$(\beta.) \qquad y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa},$$

in welcher $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\varkappa$ positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, abgeleitete, in y' algebraisch irreductible Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

die Eigenschaft hat, dass die Quadratur über ein nicht algebraisches Integral derselben durch eben dieses Integral algebraisch ausdrückbar ist, sind die, dass die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\omega_0' + \alpha_0 f_1 \omega_0 = F_0, \quad \omega_1' + \alpha_1 f_1 \omega_1 = F_1, \quad \ldots \quad \omega_\varkappa' + \alpha_\varkappa f_1 \omega_\varkappa = F_\varkappa$$

algebraische Integrale besitzen, und in diesem Falle hat die Quadratur selbst die Form

$$\int y dx = \omega_0 Y^{\alpha_0} + \omega_1 Y^{\alpha_1} + \cdots + \omega_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa},$$

die mit (β.) zusammengestellt durch Elimination von Y den gesuchten algebraischen Ausdruck in x und y für die gegebene Quadratur liefert.

Ich stelle nunmehr die Frage allgemeiner, indem ich alle linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zu charakterisiren suche, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Quadratur über eines ihrer Integrale genommen algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar sei. Wie schon oben gezeigt worden, muss eine lineare Differentialgleichung

$$(57.) \qquad y^{(m)} + f_1 y^{(m-1)} + \cdots + f_m y = f,$$

in welcher $f_1, f_2, \ldots f_m, f$ algebraische Functionen von x bedeuten, und für welche

$$(58.) \qquad \int y_1 dx = F(x, y_1)$$

sein soll, wenn F ebenfalls eine algebraische Function und y_1 ein particuläres Integral von (57.) darstellt, das Integral y_1 mit einer Differentialgleichung erster Ordnung gemein haben, und wenn man von der Differentialgleichung

$$(59.) \qquad y_1 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1'$$

denjenigen in y' algebraisch irreductibeln Factor absondert, welcher dem

Werthe y'_1 zugehört, so wird die so entstehende Differentialgleichung erster Ordnung

$$(60.)\quad \varphi(x, y, y') = 0$$

alle Integrale mit (57.) gemein haben, und für alle diese Integrale wird auch die entsprechende Gleichung (58.) bestehen. Bezeichnen wir nun m Fundamentalintegrale der reducirten homogenen Differentialgleichung

$$(61.)\quad y^{(m)}+f_1 y^{(m-1)}+\cdots+f_m y = 0$$

mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, so ist bekanntlich das allgemeine Integral von (57.)

$$(62.)\quad y = c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_m\eta_m+L,$$

worin

$$L = \eta_1\int\frac{\Delta_1}{\Delta}f\,dx+\eta_2\int\frac{\Delta_2}{\Delta}f\,dx+\cdots+\eta_m\int\frac{\Delta_m}{\Delta}f\,dx$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_m \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \ldots & \eta'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(m-1)} & \eta_2^{(m-1)} & \ldots & \eta_m^{(m-1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_r = \begin{vmatrix} \eta_1 & \ldots & \eta_{r-1} & \eta_{r+1} & \ldots & \eta_m \\ \eta'_1 & \ldots & \eta'_{r-1} & \eta'_{r+1} & \ldots & \eta'_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(m-2)} & \ldots & \eta_{r-1}^{(m-2)} & \eta_{r+1}^{(m-2)} & \ldots & \eta_m^{(m-2)} \end{vmatrix}$$

ist; es muss also auch das allgemeine Integral von (60.), da es ein Integral von (57.) sein muss, die Form haben

$$(63.)\quad y = R_1\eta_1+R_2\eta_2+\cdots+R_m\eta_m+L,$$

worin $R_1, R_2, \ldots R_m$ Functionen *einer* willkürlichen Constanten sein werden.

Greifen wir $m+1$ solcher Integrale heraus, so dass

$$\begin{aligned} y_1 &= R_{11}\eta_1+R_{12}\eta_2+\cdots+R_{1m}\eta_m+L, \\ y_2 &= R_{21}\eta_1+R_{22}\eta_2+\cdots+R_{2m}\eta_m+L, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m+1} &= R_{m+11}\eta_1+R_{m+12}\eta_2+\cdots+R_{m+1m}\eta_m+L \end{aligned}$$

wird, so können, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1m} & 1 \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2m} & 1 \\ \vdots & & & & \\ R_{m+11} & R_{m+12} & \ldots & R_{m+1m} & 1 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, L linear durch $y_1, y_2, \ldots y_{m+1}$ ausgedrückt werden, und dass dieselbe entweder nicht für jede Wahl der particulären Integrale verschwindet oder wenigstens, da nicht alle Unterdeterminanten beliebiger Ordnung verschwinden können, eine lineare homogene

Relation zwischen einigen der Integrale $y_1, y_2, \dots y_{m+1}$, deren eines als allgemeines angenommen werden darf, feststellt, ist in meiner Arbeit „Ueber Irreductibilität der linearen Differentialgleichungen" im 96. Bande dieses Journals (Seite 133) nachgewiesen worden. Setzt man diese Werthe von η_1, $\eta_2, \dots \eta_m$, L in (63.) ein, so ergiebt sich für die Form des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung erster Ordnung (60.)

$$(64.)\qquad y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + \cdots + S_m y_m + S_{m+1} y_{m+1},$$

somit das allgemeine Integral als homogene lineare Function von $m+1$ particulären Integralen, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten abhängen, und zum Theil auch verschwinden können. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Eigenschaft hat, dass die Quadratur über eines ihrer Integrale algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar ist, so muss dieses Integral der reductibeln linearen Differentialgleichung einer solchen in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung genügen, deren allgemeines Integral eine homogene lineare Function von $m+1$ particulären Integralen derselben ist, deren Coefficienten Functionen e i n e r *willkürlichen Constanten sind.*

Nun habe ich aber in der schon oben erwähnten Arbeit „Ueber Irreductibilität linearer Differentialgleichungen" nachgewiesen, dass nur dann eine Differentialgleichung erster Ordnung die Eigenschaft haben kann, dass ihr allgemeines Integral eine lineare Function von particulären Integralen ist, wenn dieselbe eine lineare oder eine durch eine algebraische Substitution aus einer linearen abgeleitete ist *). Es ist aber leicht zu sehen,

*) Zur Ergänzung des dort gegebenen Beweises dürfte vielleicht die folgende Bemerkung an der Stelle sein: Es sollte die Unmöglichkeit der dortigen Gleichung (24.) nachgewiesen werden oder nach den daselbst gegebenen Beziehungen die Unmöglichkeit der Gleichung

$$(\alpha.)\left\{\begin{array}{l} R_1 F(x, Y_1) + R_2 F(x, Y_2) + R_3 F(x, Y_3) \\ + \Sigma_x R_x F\left(x, \dfrac{c_3 Y_1(Y_2 - Y_3) + c_x Y_2(Y_3 - Y_1)}{c_3(Y_2 - Y_3) + c_x(Y_3 - Y_1)}\right) = F\left(x, \dfrac{c_3 Y_1(Y_2 - Y_3) + c Y_2(Y_3 - Y_1)}{c_3(Y_2 - Y_3) + c(Y_3 - Y_1)}\right); \end{array}\right.$$

besteht nun zwischen Y_1, Y_2, Y_3 keine algebraische Relation, so müsste diese Gleichung für alle hierin vorkommenden Grössen identisch befriedigt sein; setzt man aber $Y_3 = Y_1$, so folgt

$$(R_1 + R_3) F(x, Y_1) + R_2 F(x, Y_2) + \Sigma_x R_x^{\nu} F(x, Y_1) = F(x, Y_1),$$

und diese Gleichung kann wegen der Willkürlichkeit von Y_2 nicht bestehen. Es muss daher zwischen Y_1, Y_2, Y_3 eine algebraische Beziehung stattfinden, und der

dass jede aus der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(65.)\quad Y' = f_1 Y + f_2$$

durch die Substitution

$$(66.)\quad y = F_0 + F_1 Y + F_2 Y^2 + \cdots + F_\varkappa Y^\varkappa,$$

in welcher $F_0, F_1, \ldots F_\varkappa$ beliebige algebraische Functionen von x sind, abgeleitete Differentialgleichung erster Ordnung

$$(67.)\quad \varphi(x, y, y') = 0$$

die Eigenschaft hat, dass ihr allgemeines Integral eine lineare Function mit constanten Coefficienten von einer Anzahl particulärer Integrale ist; denn bildet man die Ableitungen von y nach (66.) mit Benutzung von (65.), so ergiebt sich

$$\begin{aligned} y' &= F_{01} + F_{11} Y + F_{21} Y^2 + \cdots + F_{\varkappa 1} Y^\varkappa, \\ y'' &= F_{02} + F_{12} Y + F_{22} Y^2 + \cdots + F_{\varkappa 2} Y^\varkappa, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(\varkappa+1)} &= F_{0\varkappa+1} + F_{1\varkappa+1} Y + F_{2\varkappa+1} Y^2 + \cdots + F_{\varkappa\varkappa+1} Y^\varkappa, \end{aligned}$$

worin $F_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x sind, und durch Elimination von

---

Ausdruck des allgemeinen Integrales

$$Y = \frac{c_3 Y_1 (Y_2 - Y_3) - c Y_2 (Y_3 - Y_1)}{c_3 (Y_2 - Y_3) - c (Y_3 - Y_1)}$$

würde dann in

$$Y = \Phi(x, Y_1, Y_2, c)$$

übergehen; da aber, wie wir wissen, in diesem Falle eine algebraische Substitution existirt

$$Y = \omega(x, \eta),$$

welche die Differentialgleichung

$$\frac{dY}{dx} = \varphi_0 + \varphi_1 Y + \varphi_2 Y^2$$

in

$$(\beta.)\quad \frac{d\eta}{dx} = \varphi(x, \eta)$$

überführt, für welche die zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen stattfindende Beziehung

$$\eta = \psi(\eta_1, \eta_2, c)$$

lautet, so wird wiederum nach S. 102 meiner „Allgem. Untersuchungen" geschlossen werden können, dass die Differentialgleichung (β.) eine in η lineare oder eine durch algebraische Substitution aus einer solchen abgeleitete ist; in allen Fällen wird also auch die Gleichung in Y, also auch die durch algebraische Substitution aus dieser abgeleitete entweder eine lineare oder eine durch algebraische Substitution aus einer linearen abgeleitete sein.

$Y, Y^2, \dots Y^\varkappa$ die lineare homogene Differentialgleichung $(\varkappa+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(68.)\quad y^{(\varkappa+1)}+P_1 y^{(\varkappa)}+\cdots+P_\varkappa y = 0,$$

worin die P wiederum algebraische Functionen von x bedeuten *); da nun alle Integrale von (67.) der Differentialgleichung (68.) genügen müssen, je

---

*) Man könnte auch folgende Schlussweise anwenden, die eine allgemeinere Anwendung gestattet, aber in unserem Falle eine unnöthig hohe Grenze für die Anzahl der particulären Integrale liefert, durch welche sich das allgemeine Integral von (57.) ausdrücken lässt. Da nämlich das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung von zwei particulären Integralen in der Form abhängt

$$(\alpha.)\quad Y = m_1 Y_1+m_2 Y_2,$$

worin m_1 und m_2 Functionen einer willkürlichen Constanten sind, so folgt

$$Y^r = m_1^r Y_1^r+r_1 m_1^{r-1} m_2 Y_1^{r-1} Y_2+\cdots+m_2^r Y_2^r,$$

und somit vermöge der Beziehung (66.)

$$y = F_0+m_1 F_1 Y_1+m_2 F_1 Y_2+m_1^2 F_2 Y_1^2+2m_1 m_2 F_2 Y_1 Y_2+\cdots+m_2^\varkappa F_\varkappa Y_2^\varkappa;$$

giebt man nun der willkürlichen Constanten c, welche in m_1 und m_2 enthalten ist, $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ particuläre Werthe, denen die particulären Integrale

$$y_1,\quad y_2,\quad \dots\quad y_{\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}}$$

entsprechen mögen, so wird man aus allen diesen Gleichungen die Grössen

$$F_0,\quad F_1 Y_1,\quad F_1 Y_2,\quad \dots\quad F_\varkappa Y_2^\varkappa$$

eliminiren können und zwischen dem allgemeinen und $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ particulären Integralen die Beziehung erhalten

$$y = R_1 y_1+R_2 y_2+\cdots+R_{\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}} y_{\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}}.$$

Man sieht aber, dass diese Schlussweise bestehen bleibt, wenn Y_1 und Y_2 nicht grade particuläre Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung bedeuten; denn die Relation $(\alpha.)$ bestünde auch, wenn Y_1 und Y_2 particuläre Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung und m_1 und m_2 willkürliche Constanten wären, und wenn man somit auf eine solche eine algebraische Substitution von der Form (66.) anwendet, so würde die durch Elimination von Y und Y' aus der Gleichung (66.), deren erstem und zweitem Differential mit Benutzung der vorgelegten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung hergeleitete algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung ebenfalls die Eigenschaft haben, dass ihr allgemeines Integral sich durch $\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}$ ihrer particulären Integrale linear und homogen ausdrücken lässt. Es ist von selbst einleuchtend, wie man diese Resultate verallgemeinern kann, und es mag nur noch hervorgehoben werden, wie man auf demselben Wege zu Sätzen ganz anderer Art gelangen kann. Sei z. B. eine Differentialgleichung so beschaffen, dass das allgemeine Integral eine ganze Function von n particulären Integralen ist, deren Coefficienten Functionen von x und willkürlichen Constanten sind, so braucht man diesen Constanten nur so viel verschiedene Werthe zu geben, als die ganze Function der n particulären Integrale Posten besitzt, um durch Elimination dieser Posten stets das allgemeine Integral als *lineare* Function einer bestimmten Anzahl ihrer particulären Integrale auszudrücken.

$\varkappa+2$ Integrale dieser linearen homogenen Differentialgleichung aber in homogener linearer Beziehung stehen, so folgt,

dass die aus der linearen Differentialgleichung erster Ordnung durch die Substitution (66.) *hergeleitete Differentialgleichung erster Ordnung die Eigenschaft hat, dass ihr allgemeines Integral sich als eine homogene lineare Function von* $\varkappa+1$ *particulären Integralen ausdrücken lässt.*

Man sieht aber auch sogleich, dass für den Fall, dass die vorgelegte lineare Differentialgleichung erster Ordnung eine homogene

$$(69.)\qquad Y' = f_1 Y$$

ist, auch jede Substitution der Form

$$(70.)\qquad y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa},$$

worin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\varkappa$ willkürliche positive oder negative rationale Zahlen sind, dasselbe leistet; denn es ist $y', y'', \ldots$ wieder eine lineare Function von $Y^{\alpha_0}, Y^{\alpha_1}, \ldots Y^{\alpha_\varkappa}$, was nicht der Fall sein würde, wenn die Gleichung (69.) nicht homogen wäre, und es wird daher *das allgemeine Integral der durch die Substitution* (70.) *aus* (69.) *abgeleiteten algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung wiederum eine homogene lineare Function von* $\varkappa+1$ *particulären Integralen derselben sein.*

Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen, so ergiebt sich Folgendes: Wenn eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung die Eigenschaft haben soll, dass die Quadratur über eines ihrer Integrale genommen algebraisch durch eben dieses Integral ausdrückbar ist, so muss dieses Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung angehören, deren allgemeines Integral eine homogene lineare Function einer Anzahl ihrer particulären Integrale mit constanten Coefficienten ist, und diese wiederum konnten nur lineare oder durch algebraische Substitution aus linearen Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitete sein; nun haben aber in der That, wie wir sahen, alle aus der Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y + f_2$$

durch die Substitution

$$y = F_0 + F_1 Y + F_2 Y^2 + \cdots + F_\varkappa Y^\varkappa,$$

und alle aus der Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y$$

durch die Substitution

$$y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa}$$

abgeleiteten Differentialgleichungen erster Ordnung die Eigenschaft, dass das allgemeine Integral sich durch eine derartige homogene lineare Function von particulären Integralen ausdrücken lässt, und man erkennt weiter leicht, dass jede in Y gebrochene oder in y nicht lineare Substitution eine Differentialgleichung erster Ordnung liefert, für welche eine solche Beziehung im Allgemeinen nicht stattfindet, wenn nicht die lineare Differentialgleichung erster Ordnung eine homogene und die Substitution in der zuletzt oben angegebenen Form enthalten ist. Um dies nachzuweisen, will ich den einfachsten Fall nach einer allgemein durchführbaren Methode behandeln und annehmen, dass y nicht wie oben linear in der Substitution enthalten ist, sondern dass letztere die Form hat

$$(71.)\qquad y^2 = Y,$$

und die Frage aufwerfen, ob die durch diese Substitution aus der linearen Differentialgleichung

$$(72.)\qquad Y' = f_1 Y + f_2$$

abgeleitete Differentialgleichung erster Ordnung

$$(73.)\qquad 2yy' = f_1 y^2 + f_2$$

die Eigenschaft haben kann, dass ihr allgemeines Integral eine lineare homogene Function von ϱ particulären Integralen

$$(74.)\qquad y = S_1 y_{\alpha_1} + S_2 y_{\alpha_2} + \cdots + S_\varrho y_{\alpha_\varrho}$$

sein kann, worin $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ Functionen einer willkürlichen Constanten C sind. Da bekanntlich zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen der Differentialgleichung (72.) die Beziehung besteht

$$(75.)\qquad Y = \frac{c-c_2}{c_1-c_2} Y_1 - \frac{c-c_1}{c_1-c_2} Y_2,$$

so erhält man vermöge (71.) für das allgemeine und zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung (73.) den Ausdruck

$$(76.)\qquad y^2 = \frac{c-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c-c_1}{c_1-c_2} y_2^2;$$

setzt man nun in (74.) $C = c, c_1, c_2, c_3, \ldots c_\varrho$, worin $c_3, c_4, \ldots c_\varrho$ völlig willkürliche Werthe sind, so ergiebt sich aus dem Systeme von Gleichungen

$$(77.)\qquad \begin{cases} y = S_1 y_{\alpha_1} + S_2 y_{\alpha_2} + \cdots + S_\varrho y_{\alpha_\varrho}, \\ y_1 = S_{11} y_{\alpha_1} + S_{12} y_{\alpha_2} + \cdots + S_{1\varrho} y_{\alpha_\varrho}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_\varrho = S_{\varrho 1} y_{\alpha_1} + S_{\varrho 2} y_{\alpha_2} + \cdots + S_{\varrho\varrho} y_{\alpha_\varrho} \end{cases}$$

die lineare Relation

$$y = R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3 + \cdots + R_\varrho y_\varrho,$$

worin die willkürlichen Grössen $c_3, c_4, \ldots c_\varrho$ in den R enthalten sind, und somit unter der Annahme der Relation (76.) die Beziehung

$$(78.)\begin{cases} \frac{c-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c-c_1}{c_1-c_2} y_2^2 = R_1^2 y_1^2 + R_2^2 y_2^2 + \sum_3^\varrho{}_\varkappa R_\varkappa^2 \left(\frac{c_\varkappa - c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\varkappa - c_1}{c_1-c_2} y_2^2\right) + 2R_1R_2y_1y_2 \\ \quad + 2R_1 y_1 \sum_3^\varrho{}_\varkappa R_\varkappa \sqrt{\frac{c_\varkappa-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\varkappa-c_1}{c_1-c_2} y_2^2} + 2R_2 y_2 \sum_3^\varrho{}_\varkappa R_\varkappa \sqrt{\frac{c_\varkappa-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\varkappa-c_1}{c_1-c_2} y_2^2} \\ \quad + 2\Sigma_{\varkappa,\lambda} R_\varkappa R_\lambda \sqrt{\frac{c_\varkappa-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\varkappa-c_1}{c_1-c_2} y_2^2}\sqrt{\frac{c_\lambda-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\lambda-c_1}{c_1-c_2} y_2^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichung muss jedenfalls eine in y_1 und y_2 identische sein, da sonst $\frac{y_1}{y_2}$ sich als Constante ergeben und daher auch $Y_2 = \mu Y_1$ sein würde, was nicht möglich ist, da die Differentialgleichung (72.) keine homogene sein sollte, und zugleich muss sie für willkürliche Werthe von $c_3, c_4, \ldots c_\varrho$ bestehen, also auch in diesen Grössen identisch befriedigt werden. Setzt man $\frac{y_1}{y_2} = t$, so sieht man, dass, wenn t einen der durch die Werthe

$$t = \sqrt{\frac{c_\varkappa - c_1}{c_\varkappa - c_2}}$$

gegebenen Punkte umkreist, die entsprechende Quadratwurzel in der Gleichung (78.) ihr Zeichen ändert, und vollführen wir dies nach einander für alle $\varkappa$, addiren die so entstehende Gleichung zu (78.), so ergiebt sich die wieder in $y_1, y_2, c_3, \ldots c_\varrho$ identisch zu erfüllende Gleichung

$$(79.)\begin{cases} \frac{c-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c-c_1}{c_1-c_2} y_2^2 = R_1^2 y_1^2 + R_2^2 y_2^2 + \sum_3^\varrho{}_\varkappa R_\varkappa^2 \left(\frac{c_\varkappa - c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\varkappa - c_1}{c_1-c_2} y_2^2\right) + 2R_1R_2y_1y_2 \\ \quad + 2\Sigma_{\varkappa,\lambda} R_\varkappa R_\lambda \sqrt{\frac{c_\varkappa-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\varkappa-c_1}{c_1-c_2} y_2^2}\sqrt{\frac{c_\lambda-c_2}{c_1-c_2} y_1^2 - \frac{c_\lambda-c_1}{c_1-c_2} y_2^2}; \end{cases}$$

lässt man in dieser Gleichung t den Punkt

$$\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2}}$$

umkreisen, so werden alle durch die Verbindung 3λ charakterisirten Posten das entgegengesetzte Zeichen annehmen, und diese Gleichung mit (79.) vereinigt wird keinen Posten mit $\varkappa = 3$ enthalten; lässt man in der so entstandenen Gleichung t den Punkt

$$\sqrt{\frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2}}$$

umkreisen, so kann man ähnlich eine Gleichung entstehen lassen, welche die Verbindung 4λ nicht enthält, u. s. w. bis man endlich zu einer Gleichung gelangt, welche gar keine Quadratwurzeln mehr einschliesst und die Form hat

$$(80.)\quad \begin{cases} \dfrac{c-c_2}{c_1-c_2}y_1^2-\dfrac{c-c_1}{c_1-c_2}y_2^2 \\ = R_1^2y_1^2+R_2^2y_2^2+\sum_3^{\varrho}{}_{\varkappa}R_\varkappa^2\left(\dfrac{c_\varkappa-c_2}{c_1-c_2}y_1^2-\dfrac{c_\varkappa-c_1}{c_1-c_2}y_2^2\right)+2R_1R_2y_1y_2=0, \end{cases}$$

welche aber nicht identisch sein kann, weil R_1 oder R_2 verschwinden müssten, was nicht der Fall ist. Es kann somit die Gleichung (73.) die durch (74.) charakterisirte Eigenschaft des allgemeinen Integrales nicht besitzen.

Schliesst man genau in derselben Weise im allgemeinen Falle, so ergiebt sich der nachfolgende Satz:

Von allen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung haben im Allgemeinen nur die aus der linearen nicht homogenen erster Ordnung

$$Y' = f_1Y+f_2$$

durch die Substitution

$$y = F_0+F_1Y+F_2Y^2+\cdots+F_\varkappa Y^\varkappa,$$

in welcher F_0, F_1, ... $F_\varkappa$ beliebige algebraische Functionen von x sind, und die aus der linearen homogenen

$$Y' = f_1Y$$

durch die Substitution

$$y = F_0Y^{\alpha_0}+F_1Y^{\alpha_1}+\cdots+F_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa},$$

worin F_0, F_1, ... $F_\varkappa$ beliebige algebraische Functionen, α_0, α_1, ... $\alpha_\varkappa$ beliebige positive oder negative rationale Zahlen bedeuten, abgeleiteten Differentialgleichungen erster Ordnung — und zwar alle — die Eigenschaft, dass ihr allgemeines Integral eine homogene lineare Function einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale mit constanten Coefficienten ist.

Wie aber die so charakterisirten Differentialgleichungen sich zu der Forderung verhalten, dass die Quadratur eines ihrer Integrale sich algebraisch durch dieses Integral soll ausdrücken lassen, ist oben gezeigt worden, und da das Integral einer jeden linearen Differentialgleichung, für welche eben diese Eigenschaft statthaben soll, nach dem Früheren einer Differentialgleichung erster Ordnung angehören muss, für welche die oben ausge-

sprochene Beziehung zwischen dem allgemeinen und ihren particulären Integralen bestehen muss, so erhalten wir das folgende Theorem:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Quadratur eines Integrales einer beliebigen linearen Differentialgleichung durch eben dieses Integral algebraisch ausdrückbar sei, ist die, dass dieses Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung angehöre, welche aus der linearen Differentialgleichung

$$Y' = f_1 Y + f_2$$

durch Anwendung der Substitution

$$y = F_0 Y^{\alpha_0} + F_1 Y^{\alpha_1} + \cdots + F_\varkappa Y^{\alpha_\varkappa},$$

in welcher $F_0, F_1, \ldots F_\varkappa$ *algebraische Functionen,* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\varkappa$ *positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen bedeuten, abgeleitet ist, worin diese Grössen den Bedingungen unterliegen, dass die folgenden linearen Differentialgleichungen in* $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_\varkappa$

$$\omega'_\varkappa + \alpha_\varkappa f_1 \omega_\varkappa = F_\varkappa, \quad \omega'_{\varkappa-1} + \alpha_{\varkappa-1} f_1 \omega_{\varkappa-1} = F_{\varkappa-1} - \varkappa f_2 \omega_\varkappa,$$

$$\omega'_{\varkappa-2} + \alpha_{\varkappa-2} f_1 \omega_{\varkappa-2} = F_{\varkappa-2} - (\varkappa-1) f_2 \omega_{\varkappa-1}, \quad \ldots \quad \omega'_0 + \alpha_0 f_1 \omega_0 = F_0 - f_2 \omega_1$$

algebraische Integrale besitzen, wobei, wenn f_2 *von Null verschieden ist,* $\alpha_\varkappa = \varkappa$, $\alpha_{\varkappa-1} = \varkappa - 1, \ldots \alpha_0 = 0$ *sein muss.*

Somit sind wir im Stande, die Form aller linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anzugeben, welche die Eigenschaft haben, dass die Quadratur über eines ihrer Integrale genommen von eben diesem Integrale algebraisch abhängt.

Den 2. Februar 1884.

Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoides.

(Von Herrn *F. Grube* in Schleswig.)

Im 69. Bande dieses Journals habe ich eine Lösung des Problems der Anziehung eines homogenen Ellipsoides mitgetheilt, bei welcher das Ellipsoid in unendlich dünne, einem der Hauptschnitte parallele Scheiben zerlegt wurde. Die Entwicklung der Formeln für die Attractionscomponenten beruhte auf der Umformung des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(A\cos\psi - a)^2 + (B\sin\psi - b)^2 + c^2}}$$

in das Integral

$$2\int_\sigma^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(A^2+x)(B^2+x) - c^2(A^2+x)(B^2+x) - a^2x(B^2+x) - b^2x(A^2+x)}},$$

wo σ die positive Wurzel der kubischen Gleichung bedeutet:

$$\frac{a^2}{A^2+x} + \frac{b^2}{B^2+x} + \frac{c^2}{x} = 1.$$

In dem Folgenden soll aus derselben Umformung noch eine andere, höchst einfache Lösung des genannten Problems hergeleitet werden, welcher die Zerlegung des Ellipsoides in unendlich dünne, mit der Begrenzung concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Schalen zu Grunde liegt, eine Zerlegung, deren sich bekanntlich *Poisson* und nach ihm *Chasles* bedient haben.

Die Halbaxen des Ellipsoides seien m, n, p; die auf dieselben als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bezogenen Coordinaten irgend eines Punktes des Ellipsoides x, y, z, die des angezogenen Punktes a, b, c; das Massenelement des Ellipsoides werde mit dT bezeichnet. Dann ist das Potential V des Ellipsoides gleich dem über alle Massenelemente desselben ausgedehnten Integral

$$\int \frac{dT}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Statt der Coordinaten x, y, z führe ich drei neue Coordinaten λ, μ, ν ein vermittelst der Gleichungen

$$x = m\lambda\sin\mu\cos\nu, \quad y = n\lambda\sin\mu\sin\nu, \quad z = p\lambda\cos\mu.$$

Dadurch wird $dT = mnp\lambda^2\sin\mu d\lambda d\mu d\nu$. Eine dreifache Integration nach λ, μ, ν wird sich auf alle Punkte des Ellipsoides erstrecken, wenn man den Variablen λ, μ, ν resp. die Grenzen 0 und 1, 0 und π, 0 und 2π ertheilt.

Da alle Punkte des Ellipsoides, für die λ constant ist, auf der Oberfläche eines mit seiner Begrenzung concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoides liegen, so ist das Potential V' einer zwischen zwei unendlich dünnen, mit der Begrenżung concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen mit den Halbaxen $m\lambda$, $n\lambda$, $p\lambda$ und $m(\lambda+d\lambda)$, $n(\lambda+d\lambda)$, $p(\lambda+d\lambda)$ eingeschlossenen Schale gleich

$$mnp\lambda^2 d\lambda\int_0^\pi \sin\mu\, d\mu\int_0^{2\pi}\frac{d\nu}{\sqrt{(m\lambda\sin\mu\cos\nu-a)^2+(n\lambda\sin\mu\sin\nu-b)^2+(p\lambda\cos\mu-c)^2}}.$$

Das auf ν bezügliche Integral unterziehen wir der oben erwähnten Umformung: dadurch wird

$$V' = 2mnp\lambda^2 d\lambda\int_0^\pi \sin\mu\, d\mu$$

$$\times\int_\varrho^\infty ds\left[\begin{matrix} s(m^2\lambda^2\sin^2\mu+s)(n^2\lambda^2\sin^2\mu+s)-(p\lambda\cos\mu-c)^2(m^2\lambda^2\sin^2\mu+s)(n^2\lambda^2\sin^2\mu+s) \\ -a^2s(n^2\lambda^2\sin^2\mu+s)-b^2s(m^2\lambda^2\sin^2\mu+s)\end{matrix}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

wo ϱ die positive Wurzel der in Bezug auf s kubischen Gleichung

$$1 = \frac{a^2}{m^2\lambda^2\sin^2\mu+s}+\frac{b^2}{n^2\lambda^2\sin^2\mu+s}+\frac{(p\lambda\cos\mu-c)^2}{s}$$

bedeutet. Führt man in den vorstehenden Ausdruck für V' statt s die neue Variable $s\lambda^2\sin^2\mu$ ein, und darauf statt μ die neue Variable $z=\lambda\cos\mu$, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$(1.)\qquad V' = 2mnp\lambda d\lambda\int_{-\lambda}^{\lambda}dz\int_{\varrho'}^{\infty}\frac{ds}{\Delta\sqrt{S-\left(z-\frac{pc}{p^2+s}\right)^2}},$$

wo zur Abkürzung

$$\sqrt{(m^2+s)(n^2+s)(p^2+s)} = \Delta,$$

$$\frac{s}{p^2+s}\left(\lambda^2-\frac{a^2}{m^2+s}-\frac{b^2}{n^2+s}-\frac{c^2}{p^2+s}\right) = S$$

gesetzt ist, und ϱ' die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$(2.)\qquad S-\left(z-\frac{pc}{p^2+s}\right)^2 = 0$$

bedeutet.

Sieht man in der letzten Gleichung z und s als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der ZS-Ebene an, so stellt dieselbe eine mit zwei Zweigen sich ins Unendliche erstreckende Curve dar, welche die in den Entfernungen $-\lambda$ und $+\lambda$ von der Axe der s auf der Axe der z errichteten Senkrechten zu Asymptoten hat. (Für $z = \pm\lambda$ wird nämlich $s = \infty$.) Die doppelte Integration in (1.) erstreckt sich auf alle Elemente des zwischen jenen beiden Zweigen liegenden Stückes der ZS-Ebene. Da die Integration nach s nicht ausführbar ist, wohl aber die nach z, so ist es angezeigt, die Reihenfolge der Integrationen umzukehren. Dann wird die untere Grenze der Integration nach s der kleinste Werth der Ordinate s der durch die Gleichung (2.) dargestellten Curve werden, während die obere Grenze ∞ bleibt. Dieser kleinste Werth des s — wir wollen ihn σ nennen — ergiebt sich leicht aus der Gleichung (2.), der zufolge nothwendig

$$S \geqq 0,\quad \text{oder}\quad \lambda^2 \geqq \frac{a^2}{m^2+s}+\frac{b^2}{n^2+s}+\frac{c^2}{p^2+s}$$

sein muss. Diese Bedingung ist offenbar für jeden Werth des s zwischen 0 und ∞ erfüllt, wenn der angezogene Punkt innerhalb der Schale liegt; liegt derselbe aber ausserhalb, so wird S erst von einem bestimmten Werth der Variablen s an positiv werden: nämlich von dem Werth an, der gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$(3.)\qquad \lambda^2 = \frac{a^2}{m^2+s}+\frac{b^2}{n^2+s}+\frac{c^2}{p^2+s}$$

ist. Demnach ist σ Null oder die positive Wurzel der Gleichung (3.), je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb der Schale liegt. (Für die zur Ordinate σ gehörige Abscisse z ergiebt sich aus (2.) der Werth $\frac{pc}{p^2+\sigma}$, der sich also für innere Punkte auf $\frac{c}{p}$ reducirt.)

Die Grenzen der Variabeln z werden nach Umkehrung der Integrationen die beiden Wurzeln der in Bezug auf z quadratischen Gleichung (2.):

$$z_0 = -\sqrt{S}+\frac{pc}{p^2+s},\quad z_1 = +\sqrt{S}+\frac{pc}{p^2+s}.$$

Somit ergiebt die Umkehrung der Integrationen:

$$V' = 2mnp\lambda\, d\lambda \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\Delta}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{S-\left(z-\frac{pc}{p^2+s}\right)^2}}.$$

Da die zu integrirende Function in (1.) überall für $s = \varrho'$ unendlich wird, so ist die Berechtigung der Umkehrung der Integrationen noch nachzuweisen. Zu diesem Zweck nehme man in dem Integral (1.) überall statt der unteren Grenze ϱ' die Grösse $\varrho'+\varepsilon$, wo ε eine positive Constante bezeichnet. In dem so modificirten Ausdruck für V', den wir mit V'_ε bezeichnen wollen, hat die zu integrirende Function innerhalb des Integrationsgebietes überall einen bestimmten endlichen Werth, so dass V'_ε durch die Umkehrung der Integrationen jedenfalls nicht verändert wird. Man überzeugt sich leicht, dass der Unterschied zwischen den Integralen V' und V'_ε, sowohl vor wie nach der Umkehrung der Integrationen, für ein unendlich kleines ε selbst unendlich klein wird. Daraus kann man schliessen, dass auch V' durch die Umkehrung der Integrationen nicht afficirt wird.

Führt man nun die Integration nach z aus, so erhält man für das Potential der oben definirten Schale den durch seine Einfachheit bemerkenswerthen Ausdruck *):

$$V' = 2mnp\pi\lambda d\lambda \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\varDelta},$$

wo also σ Null oder die positive Wurzel der Gleichung (3.) ist, jenachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb der Schale liegt.

Die Integration dieses Ausdrucks für V' nach λ zwischen den Grenzen 0 und 1 liefert für das Potential des Ellipsoides zunächst den Ausdruck:

$$V = 2mnp\pi \int_0^1 \lambda d\lambda \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\varDelta}.$$

Kehrt man auch hier die Reihenfolge der Integrationen um, so erhält man durch den bei der vorigen Umkehrung angestellten ähnliche Betrachtungen, wenn man

$$\frac{a^2}{m^2+s} + \frac{b^2}{n^2+s} + \frac{c^2}{p^2+s} = \lambda'^2$$

*) Ein ähnlicher Ausdruck für V' findet sich bereits bei *Chasles* (Mém. sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, art. 24—29; journal de l'école polyt. 25e cahier, 1837): es scheint ihm aber entgangen zu sein, dass die beiden von ihm für den Fall eines äusseren und inneren Punktes resp. aufgestellten Ausdrücke sich durch eine einzige Formel darstellen lassen. Der erste Ausdruck ist übrigens insofern ungenau, als die Grenzen des in ihm auftretenden Integrals nicht angegeben sind. Dem Ausdrucke, der für den Grenzfall entwickelt ist, dass der angezogene Punkt auf der Oberfläche der Schale sich befindet, liegt ein offenbarer Irrthum von Seiten *Chasles'* zu Grunde.

setzt, und unter μ Null oder die positive Wurzel der Gleichung

$$1 = \frac{a^2}{m^2+s} + \frac{b^2}{n^2+s} + \frac{c^2}{p^2+s}$$

versteht:

$$V = 2mnp\pi \int_\mu^\infty \frac{ds}{\Delta} \int_{\lambda'}^1 \lambda d\lambda,$$

oder schliesslich, wenn man die Integration nach λ ausführt,

$$V = mnp\pi \int_\mu^\infty \frac{1 - \frac{a^2}{m^2+s} - \frac{b^2}{n^2+s} - \frac{c^2}{p^2+s}}{\sqrt{(m^2+s)(n^2+s)(p^2+s)}} ds.$$

Schleswig, Februar 1884.

Allgemeine Eigenschaften von Flächen, deren Coordinaten sich durch die reellen Theile dreier analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen darstellen lassen.

(Von Herrn *von Lilienthal* in Bonn.)

Die vorliegenden Untersuchungen zerfallen in drei Abschnitte. Der erste wird von den Flächen selbst handeln, deren Coordinaten sich durch die reellen Theile dreier analytischer Functionen einer complexen Variabeln $u = p+qi$, deren conjugirte $v = p-qi$ sei, darstellen lassen. Hierbei gehen wir von der Bemerkung aus, dass die *Gauss*schen Ausdrücke A, B, C, D, D', D'', E, F, G nur dann ihre geometrischen Bedeutungen beibehalten, wenn sie in reellen Veränderlichen gebildet werden. Will man daher beim Studium der in Rede stehenden Flächen complexe Veränderliche anwenden, so hat man zunächst Relationen zu entwickeln, welche die in den Variabeln p, q gebildeten Grössen A, B, C, D, D', D'', E, F, G mit den entsprechenden in den Variabeln u und v gebildeten verbinden.

Nennen wir die analytischen Functionen, deren reelle Theile die Coordinaten der betrachteten Flächen darstellen, erzeugende Functionen, so gehören zu je drei erzeugenden Functionen zwei Flächen; die Coordinaten der einen sind die reellen Theile jener Functionen, während deren imaginäre Theile dividirt durch i die Coordinaten der zweiten Fläche darstellen, welche die verwandte der ersteren heissen soll. Hiernach besitzt ein und dieselbe Fläche nur eine verwandte oder mehrere, je nachdem sie aus nur einem oder aus mehreren Systemen von je drei erzeugenden Functionen hergeleitet werden kann. Der zweite Theil unserer Untersuchungen wird nun die Beziehungen unserer Flächen zu ihren verwandten behandeln.

Im dritten Abschnitt werden wir die Bedingungen betrachten, unter welchen eine gegebene Fläche zu den betrachteten gehört, d. h. erzeugende Functionen besitzt.

I.

Nennen wir die erzeugenden Functionen $U, V, W,$ ihre complex conjugirten U_1, V_1, W_1, so erhalten wir als Darstellung der Coordinaten unserer Flächen:

$$x = \tfrac{1}{2}(U+U_1),$$
$$y = \tfrac{1}{2}(V+V_1),$$
$$z = \tfrac{1}{2}(W+W_1).$$

Hier sind U, V, W Functionen von $u = p+qi$; U_1, V_1, W_1 solche von $v = p-qi$.

Neben den *Gauss*schen Ausdrücken:

$$A = \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial p}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}, \quad C = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p},$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = D,$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q} = D',$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = D'',$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = E,$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 = G,$$

führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\mathfrak{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \mathfrak{B}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \mathfrak{C}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{A}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \mathfrak{B}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \mathfrak{C}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \mathfrak{D}'',$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \mathfrak{E},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mathfrak{F},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \mathfrak{G}.$$

Hier sind die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ rein imaginär, $\mathfrak{D}''$ ist die complex conjugirte zu $\mathfrak{D}$, negativ genommen, $\mathfrak{G}$ ist complex conjugirt zu $\mathfrak{E}$, und $\mathfrak{F}$ ist reell.

Zwischen den *Gauss*schen Ausdrücken und den von uns eingeführten bestehen jetzt folgende Relationen:

$$A = -2i\mathfrak{A}, \qquad B = -2i\mathfrak{B}, \qquad C = -2i\mathfrak{C},$$
$$D = -2i(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}''), \quad D' = 2(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}''), \quad D'' = 2i(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}''),$$
$$E = \mathfrak{E}+2\mathfrak{F}+\mathfrak{G}, \qquad F = i(\mathfrak{E}-\mathfrak{G}), \qquad G = -(\mathfrak{E}-2\mathfrak{F}+\mathfrak{G}),$$
$$EG-F^2 = 4(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Sätze:

1. Entspricht den Geraden $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ in der pq-Ebene ein orthogonales Curvensystem auf der Fläche, so ist $\mathfrak{E}$ reell.

2. Ist dieses Curvensystem zugleich isometrisch, d. h. besteht für dasselbe auch die Gleichung $E = G$, so ist $\mathfrak{E} = 0$.

3. Entspricht den Geraden $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ in der pq-Ebene auf der Fläche das System der Krümmungslinien, so muss $\mathfrak{E}$ reell, $\mathfrak{D}$ rein imaginär sein.

4. Entspricht jenen Geraden das System der Asymptotenlinien, so wird $\mathfrak{D}$ reell, und ist dieses System ein orthogonales, so wird zugleich $\mathfrak{E}$ reell.

Werfen wir jetzt einen Blick auf die Krümmung unserer Flächen. Der Ausdruck für den reciproken Krümmungsradius eines Normalschnitts wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}} \cdot \frac{\mathfrak{D}\,du^2+\mathfrak{D}''\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2+2\mathfrak{F}\,du\,dv+\mathfrak{G}\,dv^2},$$

und die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\varrho^2\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\varrho\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\,.\,i(\mathfrak{E}\mathfrak{D}''+\mathfrak{G}\mathfrak{D})+(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2 = 0.$$

Man hat daher:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{i(\mathfrak{E}\mathfrak{D}''+\mathfrak{G}\mathfrak{D})}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{3}{2}}},$$

worin der Nenner eine reelle Grösse ist. Es ist somit die mittlere Krümmung unserer Flächen gleich dem doppelten imaginären Theil von $\mathfrak{G}\mathfrak{D}$ mal i, dividirt durch $(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{3}{2}}$.

Ist $\mathfrak{E} = 0$, so verschwindet auch $\mathfrak{G}$. Man erhält somit einem bekannten Satze gemäss für $\mathfrak{E} = 0$ eine Minimalfläche.

Für das Krümmungsmaass $\varkappa$ ergiebt sich der Ausdruck:

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2}.$$

Da $\mathfrak{D}''$ die complex conjugirte zu $\mathfrak{D}$ ist, negativ genommen, so erhalten wir den Satz: Alle Flächen, für welche erzeugende Functionen existiren, besitzen ein negatives Krümmungsmaass.

Die Asymptotenlinien unserer Flächen sind daher stets reell, und die *Dupin*sche Indicatrix ist eine Hyperbel.

Das Quadrat des Linienelements nimmt in den Variablen u und v die Gestalt an:

$$ds^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2.$$

Drückt man das Krümmungsmaass $\varkappa$ durch die Coefficienten dieser quadratischen Form und deren Ableitungen aus, so erhält man die beiden Darstellungen:

$$\varkappa = \frac{(\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial u\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial v}\mathfrak{E} + \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial v}\right)\mathfrak{F} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial v}\mathfrak{G}}{(\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)^2}$$

und

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}} \cdot \frac{\partial\left\{\frac{\sqrt{\mathfrak{E}}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}} \cdot \frac{\partial\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{E}}}}{\partial u}\right\}}{\partial v},$$

wovon die erste dem von *Gauss*, die zweite dem von *Liouville* aufgestellten Ausdrucke für das Krümmungsmaass analog ist. Für $\mathfrak{E} = 0$, wenn also die Fläche zu den Minimalflächen gehört, ergiebt sich die bekannte Darstellung:

$$\varkappa = -\frac{1}{\mathfrak{F}}\frac{\partial^2 \log \mathfrak{F}}{\partial u\partial v}.$$

An die Seite des Satzes, dass unsere Flächen stets ein negatives Krümmungsmaass besitzen, somit die Hauptkrümmungshalbmesser von entgegengesetztem Vorzeichen sind, tritt ein zweiter über die Krümmungshalbmesser derjenigen Normalschnitte, welche die Tangenten der Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ im Punkte p, q der Fläche enthalten.

Da die Coordinaten x, y, z unserer Flächen den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = 0$$

genügen müssen, so folgt:

$$D + D'' = 0.$$

Bezeichnen wir nun den Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnitts in einem Punkte der Fläche, welcher die Tangente der Curve $q = \text{const.}$

enthält, mit ϱ_p, und den entsprechenden Krümmungshalbmesser für $p = \text{const.}$ mit ϱ_q, so bestehen die beiden Gleichungen:

$$\frac{E}{\varrho_p} = \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{G}{\varrho_q} = \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}},$$

und somit:

$$\frac{E}{\varrho_p} + \frac{G}{\varrho_q} = 0.$$

E und G sind aber wesentlich positiv. Haben daher ϱ_p und ϱ_q endliche Werthe, so besteht der Satz:

„Die Krümmungshalbmesser derjenigen Normalschnitte in einem Punkte der Fläche, welche die Tangenten der Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ enthalten, besitzen entgegengesetzte Vorzeichen."

Wird hingegen eine der beiden Grössen ϱ_p und ϱ_q unendlich, so muss auch die andere unendlich werden, und es folgt der fernere Satz:

„Fällt eine der Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ in einem Punkte der Fläche mit einer der beiden Asymptotenlinien zusammen, so fällt die andere mit der anderen Asymptotenlinie in jenem Punkte zusammen."

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird in unseren Bezeichnungen:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{D}\,du^2 + (\mathfrak{G}\mathfrak{D} - \mathfrak{E}\mathfrak{D}'')\,du\,dv - \mathfrak{F}\mathfrak{D}''\,dv^2 = 0,$$

und die der Asymptotenlinien:

$$\mathfrak{D}\,du^2 + \mathfrak{D}''\,dv^2 = 0.$$

II.

Nachdem wir einige Haupteigenschaften unserer Flächen kennen gelernt haben, wenden wir uns zur Betrachtung der verwandten Flächen, deren Coordinaten, wie schon erwähnt, durch die Factoren von i in den imaginären Theilen der erzeugenden Functionen dargestellt werden.

Nennen wir die Coordinaten der verwandten Flächen x_1, y_1, z_1, so erhalten wir demnach für dieselben die Ausdrücke:

$$x = \frac{1}{2i}(U - U_1),$$

$$y = \frac{1}{2i}(V - V_1),$$

$$z = \frac{1}{2i}(W - W_1).$$

Setzt man jetzt:

$$A_1 = \frac{\partial y_1}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial q} - \frac{\partial y_1}{\partial q}\frac{\partial z_1}{\partial p}, \quad B_1 = \frac{\partial z_1}{\partial p}\frac{\partial x_1}{\partial q} - \frac{\partial z_1}{\partial q}\frac{\partial x_1}{\partial p}, \quad C_1 = \frac{\partial x_1}{\partial p}\frac{\partial y_1}{\partial q} - \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{\partial y_1}{\partial p},$$

$$A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial p^2} + B_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial p^2} + C_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial p^2} = D_1,$$

$$A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial p\partial q} + B_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial p\partial q} + C_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial p\partial q} = D_1',$$

$$A_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial q^2} + B_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial q^2} + C_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial q^2} = D_1'',$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial p}\right)^2 = E_1,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p}\frac{\partial x_1}{\partial q} + \frac{\partial y_1}{\partial p}\frac{\partial y_1}{\partial q} + \frac{\partial z_1}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial q} = F_1,$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial q}\right)^2 = G_1,$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial y_1}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \mathfrak{C}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial u},$$

$$\mathfrak{A}_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \mathfrak{B}_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} + \mathfrak{C}_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} = \mathfrak{D}_1,$$

$$\mathfrak{A}_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + \mathfrak{B}_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} + \mathfrak{C}_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2} = \mathfrak{D}_1'',$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)^2 = \mathfrak{E}_1,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} = \mathfrak{F}_1,$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2 = \mathfrak{G}_1,$$

so bestehen in Folge der Relationen:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x_1}{\partial q}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial y_1}{\partial q}, \quad \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial z_1}{\partial q},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial x_1}{\partial p}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = -\frac{\partial y_1}{\partial p}, \quad \frac{\partial z}{\partial q} = -\frac{\partial z_1}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = i\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = i\frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = i\frac{\partial z_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -i\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -i\frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -i\frac{\partial z_1}{\partial v},$$

die Gleichungen:

$$A = A_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1,$$

$$D = -D'' = D_1', \quad -D' = D_1 = -D_1'',$$

$$E = G_1, \quad F = -F_1, \quad G = E_1,$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1,$$
$$\frac{1}{i}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1, \quad -\frac{1}{i}\mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}_1'',$$
$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}_1, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{G} = -\mathfrak{G}_1.$$

In Folge dieser Beziehungen braucht man bei der Betrachtung der verwandten Flächen allein die für die ursprüngliche Fläche berechneten Ausdrücke $A\ldots$ $\mathfrak{A}\ldots$ zu Hülfe zu nehmen, und es ergiebt sich für die verwandten Flächen:

1. Ist das Curvensystem $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ orthogonal, so muss $\mathfrak{E}$ reell sein.

2. Besteht für dasselbe auch die Gleichung $E = G$, so muss $\mathfrak{E} = 0$ sein.

3. Entspricht den Geraden $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ in der pq-Ebene auf der Fläche das System der Krümmungslinien, so muss $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ reell sein.

4. Entspricht jenen Geraden das System der Asymptotenlinien, so wird $\mathfrak{D}$ rein imaginär.

Aus der Vergleichung dieser Sätze mit den entsprechenden für die ursprüngliche Fläche aufgestellten ergeben sich die folgenden:

1. Schneiden sich die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der ursprünglichen Fläche orthogonal, so auch auf der verwandten.

2. Sind die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der ursprünglichen Fläche Krümmungslinien, so sind dieselben auf der verwandten Asymptotenlinien, und zwar schneiden sich dieselben rechtwinklig. Umgekehrt: Bilden jene Curven auf der ursprünglichen Fläche das System der Asymptotenlinien, und ist das letztere orthogonal, so bilden sie auf der verwandten Fläche das System der Krümmungslinien.

Die bekannte Eigenschaft der Minimalflächen, dass ihren Krümmungslinien auf der verwandten Fläche Asymptotenlinien entsprechen, wenn die Gleichung $\mathfrak{E} = 0$ besteht, kommt hiernach allen Flächen zu, welche sich in der Weise aus erzeugenden Functionen herleiten lassen, dass die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ Krümmungslinien werden.

Wie folgendes Beispiel lehrt, sind die Minimalflächen nicht die einzigen Flächen mit genannter Eigenschaft.

Setzt man:

$$U = \frac{\sin u}{i}, \quad V = \frac{\cos u}{i}, \quad W = \frac{u}{i},$$

so wird:

$$x = \frac{1}{2i}(\sin u - \sin v),$$
$$y = \frac{1}{2i}(\cos u - \cos v),$$
$$z = \frac{1}{2i}(u - v)$$

und

$$\mathfrak{D} = \frac{i}{8}(\cos(u-v)-1),$$
$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{2}.$$

Die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ sind daher Krümmungslinien unserer Fläche, deren verwandte die *Meusnier*sche Schraubenfläche ist.

Betrachten wir jetzt die Krümmung der verwandten Flächen. Der Ausdruck für den reciproken Krümmungsradius eines Normalschnitts wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{-D'dp^2+2D\,dp\,dq+D'dq^2}{G\,dp^2-2F\,dp\,dq+E\,dq^2}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}} \frac{i\mathfrak{D}\,du^2-i\mathfrak{D}''dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2-2\mathfrak{F}\,du\,dv+\mathfrak{G}\,dv^2}.$$

Nennen wir ϱ'_p den Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnitts, welcher die Tangente der Curve $q = \text{const.}$ in einem Punkte der Fläche enthält, und den entsprechenden für $p = \text{const.}$ ϱ'_q, so wird:

$$\frac{1}{\varrho'_p} = \frac{-D'}{G\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{1}{\varrho'_q} = \frac{D'}{E\sqrt{EG-F^2}},$$

also

$$\frac{G}{\varrho'_p} + \frac{E}{\varrho'_q} = 0.$$

Haben die Grössen ϱ_p, ϱ_q, ϱ'_p, ϱ'_q endliche Werthe, so besteht in Folge der Gleichung:

$$\frac{E}{\varrho_p} + \frac{G}{\varrho_q} = 0$$

die Relation:

$$\frac{\varrho_p}{\varrho_q} = \frac{\varrho'_q}{\varrho'_p}.$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}''\varrho^2 - \varrho.(\mathfrak{E}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}\mathfrak{G})\sqrt{\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G}} + (\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2 = 0.$$

Die mittlere Krümmung wird daher durch den Ausdruck $\frac{-\mathfrak{G}\mathfrak{D}+\mathfrak{E}\mathfrak{D}''}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{1}{2}}}$ dargestellt, sie ist somit gleich dem doppelten reellen Theil der Grösse $\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{D}}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{1}{2}}}$ negativ genommen.

Wir können daher den Ausdruck $\frac{-2\mathfrak{G}\mathfrak{D}}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{1}{2}}}$ als Repräsentanten der mittleren Krümmung beider Flächen betrachten; der reelle Theil stellt die mittlere Krümmung der verwandten, der imaginäre Theil dividirt durch i stellt die mittlere Krümmung der ursprünglichen Fläche dar.

Ist $\mathfrak{G}$ reell, $\mathfrak{D}$ rein imaginär, so ist auch unser Ausdruck rein imaginär. Daraus folgt der Satz: Entsprechen den Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ auf der ursprünglichen Fläche Krümmungslinien, so ist die verwandte jedesmal eine Minimalfläche.

Die mittleren Krümmungen der beiden Flächen sind daher im Allgemeinen verschieden. Anders verhält es sich mit dem Krümmungsmaass. Dieses wird für die verwandte Fläche: $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2}$, somit ist es gleich dem Krümmungsmaass der ursprünglichen Fläche.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der verwandten Fläche ist:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{D}\,du^2-(\mathfrak{G}\mathfrak{D}+\mathfrak{E}\mathfrak{D}'')\,du\,dv+\mathfrak{F}\mathfrak{D}''\,dv^2 = 0,$$

und die der Asymptotenlinien:

$$\mathfrak{D}\,du^2-\mathfrak{D}''\,dv^2 = 0.$$

Wir können die verwandte Fläche als eine Abbildung der ursprünglichen Fläche auffassen. Solche Punkte beider Flächen sind als entsprechende zu betrachten, welche zu denselben Werthen der Variablen p, q oder u, v gehören.

Diese Abbildung ist nun durch folgende Eigenschaften charakterisirt:

1. Die Normalen beider Flächen in entsprechenden Punkten sind parallel.

2. Der Winkel, welchen die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ in einem Punkte der verwandten Fläche bilden, ergänzt den Winkel, welchen diese Curven im entsprechenden Punkte der ursprünglichen Fläche mit einander einschliessen, zu zwei Rechten.

3. Wegen der Relationen:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial p}}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial q}}{\sqrt{G_1}}, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial q}}{\sqrt{G}} = -\frac{\frac{\partial x_1}{\partial p}}{\sqrt{E_1}},$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial p}}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial q}}{\sqrt{G_1}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial q}}{\sqrt{G}} = -\frac{\frac{\partial y_1}{\partial p}}{\sqrt{E_1}},$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial p}}{\sqrt{E}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial q}}{\sqrt{G_1}}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial q}}{\sqrt{G}} = -\frac{\frac{\partial z_1}{\partial p}}{\sqrt{E_1}},$$

folgt der Satz: In entsprechenden Punkten beider Flächen ist die Tangente der Curve $q = \text{const.}$ auf der ursprünglichen Fläche der Tangente der Curve $p = \text{const.}$ auf der verwandten parallel, die Tangente der Curve $p = \text{const.}$ auf der ursprünglichen Fläche der Tangente der Curve $q = \text{const.}$ auf der verwandten entgegengesetzt gerichtet.

4. Beide Flächen besitzen in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaass.

Legen wir uns nun die Frage vor, wann durch die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ eine conforme Abbildung der ursprünglichen Fläche auf die verwandte vermittelt wird.

Für das Quadrat des Linearelements der ersteren erhielten wir den Ausdruck:

$$\mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2,$$

und das Quadrat des Linearelements der letzteren wird:

$$-\mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv - \mathfrak{G}\,dv^2.$$

Da $4\mathfrak{F} = E + G$, so kann $\mathfrak{F}$ nicht verschwinden. Man sieht daher, dass eine conforme Abbildung nur dann vermittelt wird, wenn $\mathfrak{E} = 0$ ist, d. h. in dem Fall, wo Minimalflächen aus solchen erzeugenden Functionen hergeleitet werden, welche der Gleichung:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{du}\right)^2 + \left(\frac{dW}{du}\right)^2 = 0$$

genügen. Weil alsdann die Linearelemente nicht nur proportional, sondern auch gleich werden, so geht einem bekannten Satze gemäss die conforme Abbildung in eine Biegung über.

Die angeführten Beziehungen der ursprünglichen Fläche zu derjenigen ihrer verwandten, welche mit ihr aus denselben erzeugenden Functionen hergeleitet ist, kann man noch durch zwei Flächeninhaltssätze vervollständigen.

Denken wir uns in der pq-Ebene ein Rechteck construirt, dessen Eckpunkte die Coordinaten $p_0 q_0$, $p_0 q$, $q_0 p$, pq haben. Das Rechteck unterwerfen wir der Bedingung, dass die ihm auf der ursprünglichen und auf der verwandten Fläche entsprechenden Flächenstücke einfach zusammenhängend sind und keinerlei Singularitäten besitzen. Diese beiden Flächenstücke sollen als einander zugehörige bezeichnet werden. Der Flächeninhalt beider wird durch dasselbe Doppelintegral:

$$\int_{p_0}^{p}\int_{q_0}^{q}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,dp\,dq$$

dargestellt. Wir haben daher den Satz gewonnen: Zugehörige Stücke beider Flächen besitzen denselben Flächeninhalt.

Denken wir uns ferner die Begrenzungen der einander zugehörigen Stücke durch parallele Normalen auf die *Gauss*sche Einheitskugel abgebildet. Dadurch entstehen zwei völlig begrenzte Stücke der Kugeloberfläche, deren Inhalt die curvatura integra je eines der zugehörigen Stücke unserer Flächen angiebt. Die curvatura integra wird bekanntlich dargestellt durch das Doppelintegral:

$$\int_{p_0}^{p}\int_{q_0}^{q}\varkappa\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,dp\,dq,$$

wo $\varkappa$ das Krümmungsmaass bezeichnet. Da nun unsere Flächen in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaass haben, so ergiebt sich der Satz: Zwei einander zugehörige Stücke der ursprünglichen Fläche und ihrer verwandten besitzen dieselbe curvatura integra.

Am Schlusse dieser Ausführungen sei es gestattet, auf folgende Frage einzugehen: In welcher allgemeinen Form stellen sich die erzeugenden Functionen einer Fläche dar, wenn auf derselben eine vorgeschriebene analytische Linie liegen soll?

Es sei zunächst diese Linie eine ebene Curve. Denken wir uns die Coordinaten derselben durch analytische Functionen der reellen Variabeln p so dargestellt, dass:

$$x = f(p), \quad y = f_1(p)$$

wird.

Alsdann sind die erzeugenden Functionen der geforderten Fläche in folgender Form enthalten:

$$\begin{aligned} U &= f(u)+i\varphi(u), \\ V &= f_1(u)+i\varphi_1(u), \\ W &= i\varphi_2(u). \end{aligned}$$

Die Functionen $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ sind hierbei der Bedingung unterworfen, für reelle Werthe von u selbst reell zu sein. Es fällt dann die Curve $q = 0$ mit der vorgeschriebenen ebenen Curve zusammen. Wenn die Functionen $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ constant sind, so lässt sich die Bedeutung angeben, welche die ebene Curve auf der Fläche besitzt; sie ist nämlich dann eine Krümmungs- und geodätische Linie der letzteren. Um dies zu zeigen, erinnern wir uns an folgenden Satz: Bildet die Tangentialebene einer Fläche längs eines ebenen Schnittes derselben mit der Ebene des Schnittes einen rechten Winkel, so ist die Schnittcurve eine Krümmungs- und geodätische Linie der Fläche. Wir haben also nur zu zeigen, dass für $q = 0$ die Grösse $\mathfrak{C}$ identisch verschwindet. Nun wird:

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial f_1(v)}{\partial v} - \frac{\partial f(v)}{\partial v}\frac{\partial f_1(u)}{\partial u}\right)$$

und für $q = 0$:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \frac{\partial f(v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1(u)}{\partial u} = \frac{\partial f_1(v)}{\partial v},$$

sodass $\mathfrak{C}$ in der That Null wird.

Ist zweitens die vorgeschriebene Curve nicht eben, so stellen wir ihre Coordinaten in der Form dar:

$$x = f(p), \quad y = f_1(p), \quad z = f_2(p),$$

und erhalten für die erzeugenden Functionen der geforderten Fläche:

$$U = f(u) + i\varphi(u),$$
$$V = f_1(u) + i\varphi_1(u),$$
$$W = f_2(u) + i\varphi_2(u).$$

Hier sind die Functionen $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ wieder der Beschränkung unterworfen, für reelle Werthe von u selbst reell zu sein; denn nur dann fällt die Curve $q = 0$ mit der vorgeschriebenen Raumcurve zusammen. Wenn $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ verschwinden, die Fläche also einfach dadurch entsteht, dass man in den die Coordinaten einer Raumcurve darstellenden Functionen an Stelle des reellen Arguments ein complexes setzt, und nun die reellen Theile der entstehenden Ausdrücke als Coordinaten einer Fläche betrachtet, so ist die Raumcurve auf der Fläche dadurch ausgezeichnet, dass längs derselben die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ identisch verschwinden.

III.

Gehen wir jetzt auf die Bedingungen ein, denen die Coordinaten einer vorgelegten Fläche genügen müssen, damit für dieselbe erzeugende Functionen existiren.

Sind die Coordinaten x, y, z einer Fläche die reellen Theile dreier analytischer Functionen des complexen Arguments $u = p+qi$, so bestehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=0.$$

Dieselben sind, wie man sich leicht überzeugt, äquivalent mit den Forderungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} 1. \;\; D+D'' = 0, \\ 2. \;\; G-E+2iF \text{ ist eine Function von } p+qi. \end{cases}$$

Sind nun die Coordinaten einer Fläche als Functionen der Veränderlichen p_1, q_1 gegeben, so müssen sich, falls für die Fläche erzeugende Functionen existiren sollen, solche Substitutionen:

$$p_1 = f(p, q), \quad q_1 = f_1(p, q)$$

finden lassen, dass die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=0$$

für alle Werthsysteme von p, q erfüllt sind.

Nun hat man:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial p_1 \partial q_1}\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\cdot\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial p_1 \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial q}\frac{\partial p_1}{\partial q}+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\cdot\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial x}{\partial p_1}\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}+\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2},$$

woraus die Ausdrücke $\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}$ resp. $\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$ durch Vertauschen von x mit y resp. z hervorgehen. Wir erhalten demnach die drei Bedingungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial p_1}\left\{\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{\partial x}{\partial q_1}\left\{\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\} \\ \quad +2\frac{\partial^2 x}{\partial p_1 \partial q_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\}+\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial p_1}\left\{\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\left\{\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{\partial^2 y}{\partial p_1^2}\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\} \\ \quad +2\frac{\partial^2 y}{\partial p_1 \partial q_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial p_1}\left\{\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\left\{\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2}\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\} \\ \quad +2\frac{\partial^2 z}{\partial p_1 \partial q_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit A, B, C, dann mit $\frac{\partial x}{\partial p_1}, \frac{\partial y}{\partial p_1}, \frac{\partial z}{\partial p_1}$, endlich mit $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1}$ und addirt jedesmal, so nehmen unsere Bedingungen folgende Form an:

$$(3.)\quad \begin{cases} D\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\}+2D'\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\}+D''\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\}=0, \\ E\left\{\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}\right\}+F\left\{\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p_1}\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\} \\ \qquad +\frac{\partial E}{\partial q_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\}+\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\}=0, \\ F\left\{\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}\right\}+G\left\{\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2}\right\}+\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_1}\right)\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\} \\ \qquad +\frac{\partial G}{\partial p_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\}=0. \end{cases}$$

Wie kann man jetzt zeigen, dass eine Minimalfläche sich stets aus erzeugenden Functionen herleiten lässt?

Wir wählen die Variabeln p_1 und q_1 so, dass ihren constanten Werthen auf der Minimalfläche Krümmungslinien entsprechen. Dann geht die Bedingung, dass die mittlere Krümmung verschwindet, in die folgende über: $GD+ED''=0$, und die Gleichungen (3.) werden:

$$E\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\}-G\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{\partial^2 p_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 p_1}{\partial q^2}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p_1}\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\}+\frac{\partial E}{\partial q_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p_1}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G\left\{\frac{\partial^2 q_1}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial q^2}\right\}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\}+\frac{\partial G}{\partial p_1}\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right\} \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Führen wir jetzt die weitere Voraussetzung ein, dass p_1 nur eine Function von p, q_1 nur eine solche von q ist, so werden die Curven $p=\text{const.}$, $q=\text{const.}$ ebenfalls Krümmungslinien der Fläche, und die letzten Gleichungen lassen sich dann so schreiben:

$$E\left(\frac{dp_1}{dp}\right)^2-G\left(\frac{dq_1}{dq}\right)^2 = 0,$$

$$E\frac{d^2p_1}{dp^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p_1}\left(\frac{dp_1}{dp}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p_1}\left(\frac{dq_1}{dq}\right)^2 = 0,$$

$$G\frac{d^2q_1}{dq^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_1}\left(\frac{dp_1}{dp}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1}\left(\frac{dq_1}{dq}\right)^2 = 0.$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach p, dann nach q, so überzeugt man sich, dass die beiden letzten Gleichungen eine Folge der ersteren sind. Die Integration dieser gelingt jetzt mit Hülfe einer Bemerkung des Herrn *Schwarz* (Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, dieses Journal Bd. 80 Seite 283). Nennen wir den einen Hauptkrümmungsradius ϱ, so ist jetzt $\frac{E}{\varrho}$ eine Function von p_1 allein, $\frac{G}{\varrho}$ eine solche von q_1 allein. Setzt man daher

$$dp = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,dp_1, \quad dq = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}\,dq_1,$$

so ist die Gleichung:

$$E\left(\frac{dp_1}{dp}\right)^2 - G\left(\frac{dq_1}{dq}\right)^2 = 0$$

erfüllt; p und q werden durch Quadraturen erhalten, und durch Umkehrung der betreffenden Integrale ergiebt sich p_1 als Function von p, q_1 als Function von q.

Die Coordinaten einer Minimalfläche lassen sich daher in der Weise als reelle Theile erzeugender Functionen darstellen, dass die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ Krümmungslinien werden. Dann ist aber nach einem oben bewiesenen Satze auch die verwandte Fläche eine Minimalfläche, somit muss $\frac{-2\mathfrak{G}\mathfrak{D}}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{3}{2}}}$ identisch verschwinden, woraus sich $\mathfrak{E} = \mathfrak{G} = 0$ ergiebt, d. h.:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{du}\right)^2 + \left(\frac{dW}{du}\right)^2 = 0.$$

Es ist übrigens nicht nothwendig, dass die erzeugenden Functionen einer Minimalfläche vorstehende Gleichung erfüllen. Man überzeugt sich davon leicht durch die Betrachtung der schon erwähnten *Meusnier*schen Schraubenfläche, für welche:

$$x = \tfrac{1}{2}(\sin u + \sin v), \quad y = \tfrac{1}{2}(\cos u + \cos v), \quad z = \tfrac{1}{2}(u+v), \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} z,$$

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{du}\right)^2 + \left(\frac{dW}{du}\right)^2 = 2$$

wird.

Besteht hingegen die Gleichung:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{du}\right)^2 + \left(\frac{dW}{du}\right)^2 = 0,$$

so hat wegen des Verschwindens von $\mathfrak{E}$ das Curvensystem $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ die Eigenschaft, isometrisch und orthogonal zu sein, d. h. die Fläche in unendlich kleine Quadrate zu theilen.

Schlussbemerkung.

Die Bedingungen dafür, dass eine gegebene Fläche erzeugende Functionen besitzt, können auch in folgender Form dargestellt werden, deren Herleitung später mitgetheilt werden soll.

Nennt man die Richtungscosinus der Normalen in einem regulären Punkt der Fläche ξ, η, ζ; ϱ_1, ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien; A_1, B_1, C_1 die Richtungscosinus der Tangente der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie und setzt:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right)^2 = N^2,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial q}\right)^2 = M^2,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\frac{\partial \eta}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial q}+\frac{\partial \zeta}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q} = N.M.\cos\omega,$$

$$A_1\frac{\partial \xi}{\partial p}+B_1\frac{\partial \eta}{\partial p}+C_1\frac{\partial \zeta}{\partial p} = N.\cos\sigma,$$

so bestehen folgende Relationen:

$$E = N^2(\varrho_1^2\cos^2\sigma+\varrho_2^2\sin^2\sigma),$$

$$F = N.M(\varrho_1^2\cos\sigma\cos(\sigma-\omega)+\varrho_2^2\sin\sigma\sin(\sigma-\omega)),$$

$$G = M^2(\varrho_1^2\cos^2(\sigma-\omega)+\varrho_2^2\sin^2(\sigma-\omega)),$$

$$\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}} = N^2(\varrho_1\cos^2\sigma+\varrho_2\sin^2\sigma),$$

$$\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}} = N.M(\varrho_1\cos\sigma\cos(\sigma-\omega)+\varrho_2\sin\sigma\sin(\sigma-\omega)),$$

$$\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}} = M^2(\varrho_1\cos^2(\sigma-\omega)+\varrho_2\sin^2(\sigma-\omega)),$$

$$EG-F^2 = N^2.M^2.\varrho_1^2\varrho_2^2\sin^2\omega.$$

Sollen jetzt die Coordinaten der Fläche die reellen Theile dreier Functionen von $p+qi$ sein, so gehen die Bedingungen III, (1.) in die folgenden über:

$$N^2(\varrho_1\cos^2\sigma+\varrho_2\sin^2\sigma)+M^2(\varrho_1\cos^2(\sigma-\omega)+\varrho_2\sin^2(\sigma-\omega)) = 0,$$

$$\varrho_1^2(M\cos(\sigma-\omega)+iN\cos\sigma)^2+\varrho_2^2(M\sin(\sigma-\omega)+iN\sin\sigma)^2 = f(p+qi).$$

Es seien jetzt die Coordinaten der Fläche als Functionen der Variablen p_1, q_1 gegeben. Die in diesen Variablen gebildeten Ausdrücke N, M, σ, ω sollen mit $N_1, M_1, \sigma_1, \omega_1$ bezeichnet werden, so dass:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial p_1}\right)^2 = N_1^2 \quad \text{u. s. f.}$$

Dann bestehen die Transformationsformeln:

$$N\cos\sigma = N_1\cos\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial p} + M_1\cos(\sigma_1-\omega_1)\frac{\partial q_1}{\partial p},$$

$$M\cos(\sigma-\omega) = N_1\cos\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial q} + M_1\cos(\sigma_1-\omega_1)\frac{\partial q_1}{\partial q},$$

$$N\sin\sigma = N_1\sin\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial p} + M_1\sin(\sigma_1-\omega_1)\frac{\partial q_1}{\partial p},$$

$$M\sin(\sigma-\omega) = N_1\sin\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial q} + M_1\sin(\sigma_1-\omega_1)\frac{\partial q_1}{\partial q}.$$

Soll nun die betrachtete Fläche erzeugende Functionen besitzen, so müssen p_1 und q_1 den Bedingungen genügen:

$$N_1^2(\varrho_1\cos^2\sigma+\varrho_2\sin^2\sigma)\left\{\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^2\right\}$$
$$+2N_1M_1(\varrho_1\cos\sigma_1\cos(\sigma_1-\omega_1)+\varrho_2\sin\sigma_1\sin(\sigma_1-\omega_1))\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial p}+\frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)$$
$$+M_1^2(\varrho_1\cos^2(\sigma_1-\omega_1)+\varrho_2\sin^2(\sigma_1-\omega_1))\left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^2\right\} = 0,$$

$$\varrho_1^2\left\{N_1\cos\sigma_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}+i\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)+M_1\cos(\sigma_1-\omega_1)\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}+i\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)\right\}^2$$
$$+\varrho_2^2\left\{N_1\sin\sigma_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}+i\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)+M_1\sin(\sigma_1-\omega_1)\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}+i\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)\right\}^2 = f(p+qi).$$

Diese Bedingungen sind den unter III, (3.) aufgestellten Differentialgleichungen äquivalent.

Bonn, im Mai 1884.

Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Martin Krause* in Rostock.)

Im Folgenden sollen Methoden angegeben werden, mit deren Hülfe man die Differentialgleichungen ableiten kann, denen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale und die Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen für die Nullwerthe der Veränderlichen Genüge leisten. Als erster Ausgangspunkt soll das Additionstheorem der Thetafunctionen dienen. Soweit dem Verfasser bekannt, ist dieser Ausgangspunkt bisher nicht benutzt worden, vielmehr dienten den mannigfachen Arbeiten, die über diesen Gegenstand erschienen sind, stets Integralbetrachtungen als Grundlage. Gerade in dem vorliegenden Falle aber scheint der angedeutete Weg nicht ohne Interesse zu sein.

Erstens gestalten sich die Betrachtungen durchaus elementar — sowohl im Prinzipe als in der wirklichen Durchführung — zweitens aber gruppiren sich die genannten Differentialgleichungen unter einen und denselben Gesichtspunkt als kleiner Theil einer unendlichen Kette von Gleichungen, deren jeder eine Bedeutung für die Theorie der hyperelliptischen Transcendenten zukommt.

Wir führen die Methode nur für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung durch, bemerken aber, dass sie weiter reicht.

Uebrigens ist der Versuch, die Theorie der hyperelliptischen Transcendenten auf die Theorie der Thetafunctionen zu gründen nicht neu — es braucht nur an die nachgelassenen Vorlesungen *Jacobis* über elliptische Functionen und die Betrachtungen erinnert zu werden, die Herr *Weierstrass* im Anschlusse an dieselben in neuester Zeit in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie veröffentlicht hat.

§ 1.

Aus der Form, die Herr *Königsberger* im 64. Bande dieses Journals dem Additionstheorem der Thetafunctionen zweier Veränderlichen gegeben hat, folgt unmittelbar die Formel:

$$(1.)\quad \begin{cases} \vartheta_5.\vartheta_0.\vartheta_5^2(v_1, v_2)\dfrac{\partial \dfrac{\vartheta_0(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_i} \\ = \vartheta_{01}.\vartheta_1'(v_i)_0.\vartheta_1(v_1, v_2).\vartheta_{01}(v_1, v_2) + \vartheta_{03}.\vartheta_3'(v_i)_0.\vartheta_3(v_1, v_2).\vartheta_{03}(v_1, v_2). \end{cases}$$

Die Differentialquotienten der übrigen 14 Quotienten $\dfrac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}$ folgen hieraus nach bekannten Regeln und mögen nicht hingeschrieben werden, vielmehr beschränken wir uns darauf, auf die schon citirte Arbeit von Herrn *Königsberger* und auf eine Arbeit des Verfassers hinzuweisen, die sich im dritten Bande der Acta mathematica befindet.

Aus den Beziehungen, die zwischen den Thetafunctionen bestehen, folgt leicht, dass die zwölf Grössen $\vartheta_a'(v_i)_0$ nicht sämmtlich von einander unabhängig sind, sondern dass wir setzen können:

$$\vartheta_3'(v_1)_0 = K_{21}\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2},\quad \vartheta_3'(v_2)_0 = K_{22}\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2},$$

$$\vartheta_{24}'(v_1)_0 = -K_{11}\frac{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\quad \vartheta_{24}'(v_2)_0 = -K_{12}\frac{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},$$

$$\vartheta_{04}'(v_1)_0 = (K_{11}+K_{21})\frac{\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\quad \vartheta_{04}'(v_2)_0 = (K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},$$

$$\vartheta_1'(v_1)_0 = (K_{11}+\varkappa^2 K_{21})\frac{\vartheta_5.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_0}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\quad \vartheta_1'(v_2)_0 = (\varkappa^2 K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_5.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_0}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},$$

$$\vartheta_{02}'(v_1)_0 = (K_{11}+\lambda^2 K_{21})\frac{\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\quad \vartheta_{02}'(v_2)_0 = (\lambda^2 K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},$$

$$\vartheta_{13}'(v_1)_0 = (K_{11}+\mu^2 K_{21})\frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.\vartheta_5.\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},\quad \vartheta_{13}'(v_2)_0 = (\mu^2 K_{22}+K_{12})\frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.\vartheta_5.\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}.$$

Hierbei ist:

$$K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21} = \pi^2\frac{\vartheta_{34}^3.\vartheta_4^3.\vartheta_5^3}{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}} = K,$$

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2.\vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2.\vartheta_5^2},\quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2.\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2},\quad \mu^2 = \frac{\vartheta_{01}^2.\vartheta_2^2}{\vartheta_5^2.\vartheta_{34}^2}.$$

Wir wollen nun setzen:

$$u_1 = K_{11}v_1 + K_{12}v_2,$$

$$u_2 = K_{21}v_1 + K_{22}v_2,$$

so folgt umgekehrt:

$$v_1 = \frac{K_{22}}{K} u_1 - \frac{K_{12}}{K} u_2 = \varkappa_{11} u_1 + \varkappa_{12} u_2,$$

$$v_2 = -\frac{K_{21}}{K} u_1 + \frac{K_{11}}{K} u_2 = \varkappa_{21} u_1 + \varkappa_{22} u_2,$$

und es ist allgemein:

$$K \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial u_1} = K_{22} \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial v_1} - K_{21} \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial v_2},$$

$$K \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial u_2} = -K_{12} \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial v_1} + K_{11} \frac{\partial f(v_1, v_2)}{\partial v_2}.$$

Wir wollen ferner setzen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = al_\alpha(u_1, u_2)$$

und die Grössen

$$al_\alpha(u_1, u_2), \quad \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial^2 al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_i^2}, \quad \frac{\partial^2 al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

für die Nullwerthe der Argumente der Reihe nach bezeichnen durch:

$$al_\alpha, \qquad al'_\alpha(u_i)_0, \qquad al''_\alpha(u_i)_0, \qquad al''_\alpha(u_1, u_2)_0.$$

Dann folgt, dass Gleichung (1.) und das aus ihr sich ergebende System richtig bleibt, wenn wir an Stelle von

$$\vartheta_\alpha, \quad \vartheta'_\alpha(v_i)_0, \quad \vartheta_\alpha(v_1, v_2)$$

der Reihe nach setzen:

$$al_\alpha, \quad al'_\alpha(u_i)_0, \quad al_\alpha(u_1, u_2).$$

Ferner folgen die Formeln:

$$al'_3(u_1)_0 = 0, \qquad al'_3(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^3},$$

$$al'_{24}(u_1)_0 = -\frac{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}, \quad al'_{24}(u_2)_0 = 0,$$

$$al'_{04}(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}, \quad al'_{14}(u_2)_0 = \frac{\vartheta_{14}.\vartheta_{01}.\vartheta_2.\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2},$$

$$al'_1(u_1)_0 = \frac{\vartheta_5.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_0}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}, \quad al'_1(u_2)_0 = \varkappa^2 \frac{\vartheta_5.\vartheta_4.\vartheta_2.\vartheta_0}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}$$

$$al'_{12}(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}, \quad al'_{12}(u_2)_0 = \lambda^2 \frac{\vartheta_{12}.\vartheta_{34}.\vartheta_{01}.\vartheta_4}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2},$$

$$al'_{13}(u_1)_0 = \frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.\vartheta_5.\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}, \quad al'_{13}(u_2)_0 = \mu^2 \frac{\vartheta_{23}.\vartheta_{03}.\vartheta_5.\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5^2}.$$

Ferner folgen die Werthe der zweiten Differentialquotienten:

$$al_0''(u_1)_0 = \quad al_0\mu^2, \qquad al_0''(u_1, u_2)_0 = \quad al_0 \varkappa^2 \mu^2,$$
$$al_0''(u_2)_0 \quad = \quad al_0 \mu^2(\varkappa^2 - \lambda^2 + \varkappa^2 \lambda^2),$$
$$al_4''(u_1)_0 = \quad al_4(\mu^2 - \lambda^2), \qquad al_4''(u_1, u_2)_0 = \quad al_4 \varkappa^2(\mu^2 - \lambda^2),$$
$$al_4''(u_2)_0 \quad = \quad al_4 \varkappa^2(\mu^2 - \lambda^2),$$
$$al_{01}''(u_1)_0 = -al_{01}(1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2), \qquad al_{01}''(u_1, u_2)_0 = -al_{01}(\lambda^2 - \varkappa^2\mu^2),$$
$$al_{01}''(u_2)_0 \quad = -al_{01}(\lambda^2\mu^2 - \varkappa^2\mu^2 + \lambda^2\varkappa^2 - \varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$
$$al_{03}''(u_1)_0 = \quad al_{03}\varkappa^2, \qquad al_{03}''(u_1, u_2)_0 = \quad al_{03}\varkappa^2\mu^2,$$
$$al_{03}''(u_2)_0 \quad = \quad al_{03}\varkappa^2(-\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2\mu^2),$$
$$al_{12}''(u_1)_0 = \quad al_{12}(\varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2), \qquad al_{12}''(u_1, u_2)_0 = \quad al_{12}\varkappa^2\mu^2,$$
$$al_{12}''(u_2)_0 \quad = \quad al_{12}\varkappa^2\lambda^2\mu^2,$$
$$al_{14}''(u_1)_0 = \quad al_{14}(-1 + \varkappa^2 + \mu^2), \qquad al_{14}''(u_1, u_2)_0 = \quad al_{14}\varkappa^2\mu^2,$$
$$al_{14}''(u_2)_0 \quad = \quad al_{14}\varkappa^2\mu^2,$$
$$al_{23}''(u_1)_0 = -al_{23}(1 - \varkappa^2), \qquad al_{23}''(u_1, u_2)_0 = -al_{23}\mu^2(1 - \varkappa^2),$$
$$al_{23}''(u_2)_0 \quad = -al_{23}\lambda^2\mu^2(1 - \varkappa^2),$$
$$al_{34}''(u_1)_0 = \quad al_{34}(\varkappa^2 - \lambda^2), \qquad al_{34}''(u_1, u_2)_0 = \quad al_{34}\mu^2(\varkappa^2 - \lambda^2),$$
$$al_{34}''(u_2)_0 \quad = \quad al_{34}\mu^2(\varkappa^2 - \lambda^2),$$
$$al_2''(u_1)_0 = -al_2(1 - \mu^2), \qquad al_2''(u_1, u_2)_0 = -al_2\varkappa^2(1 - \mu^2),$$
$$al_2''(u_2)_0 \quad = -al_2\varkappa^2\lambda^2(1 - \mu^2).$$

Bezeichnen wir die Differentialquotienten der Function $al_\varepsilon(u_1, u_2)$ für die Nullwerthe der Argumente durch:

$$\frac{\partial^r al_\varepsilon(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^n . \partial u_2^{r-n}},$$

so folgt dann mit Hülfe weniger Schlüsse der

Lehrsatz:

Ist $al_\alpha(u_1, u_2)$ eine gerade hyperelliptische Function, so sind die Ausdrücke:

$$\frac{1}{al_\alpha} \frac{\partial^{2\varkappa} al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^n . \partial u_2^{2\varkappa - n}}$$

ganze rationale Functionen der Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2. Dasselbe gilt von den Grössen

$$\frac{1}{al'_\beta(u_i)_0} \frac{\partial^{2\varkappa+1} al_\beta(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^n . \partial u_2^{2\varkappa - n + 1}},$$

wenn $al_\beta(u_1, u_2)$ eine beliebige ungerade hyperelliptische Function bedeutet, wenn ferner für $\beta = 3$, $i = 2$, in allen anderen Fällen dagegen $i = 1$ ist.

Es sind nun die Differentialquotienten der verschiedenen hyperelliptischen Functionen für die Nullwerthe der Argumente nicht unabhängig von einander, vielmehr besteht zwischen ihnen eine grosse Reihe von Relationen, von denen wir die folgenden herausgreifen, die auf der Theorie der linearen Transformation der Thetafunctionen beruhen.

Verstehen wir unter (a_0, b_1, c_2, d_3) eine beliebige lineare Transformation, so lauten die Argumente der transformirten Thetafunctionen:

$$v_1' = A_0 v_1 + B_0 v_2,$$
$$v_2' = A_1 v_1 + B_1 v_2,$$

wobei ist:

$$A_0 = \frac{c_2 - a_2\tau_{21} - b_2\tau_{22}}{N}, \qquad B_0 = \frac{-d_2 + a_2\tau_{11} + b_2\tau_{12}}{N},$$
$$A_1 = \frac{-c_3 + a_3\tau_{21} + b_3\tau_{22}}{N}, \qquad B_1 = \frac{d_3 - a_3\tau_{11} - b_3\tau_{12}}{N},$$
$$N = (c_2 - a_2\tau_{21} - b_2\tau_{22})(d_3 - a_3\tau_{11} - b_3\tau_{12}) - (d_2 - a_2\tau_{11} - b_2\tau_{12})(c_3 - a_3\tau_{21} - b_3\tau_{22}).$$

Setzen wir nun:

$$u_1' = C_{11} v_1' + C_{12} v_2',$$
$$u_2' = C_{21} v_1' + C_{22} v_2',$$

so folgt:

$$u_1' = M_0 u_1 + M_1 u_2,$$
$$u_2' = M_2 u_1 + M_3 u_2,$$

wobei ist:

$$KM_0 = (C_{11}A_0 + C_{12}A_1)K_{22} - (C_{11}B_0 + C_{12}B_1)K_{21},$$
$$KM_1 = (C_{11}B_0 + C_{12}B_1)K_{11} - (C_{11}A_0 + C_{12}A_1)K_{12},$$
$$KM_2 = (C_{21}A_0 + C_{22}A_1)K_{22} - (C_{21}B_0 + C_{22}B_1)K_{21},$$
$$KM_3 = (C_{21}B_0 + C_{22}B_1)K_{11} - (C_{21}A_0 + C_{22}A_1)K_{12}.$$

Die transformirten Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente bezeichnen wir durch O_α. Nehmen wir nun an, dass für die Transformation (a_0, b_1, c_2, d_3) wird:

$$\varepsilon\vartheta_{24}(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \varepsilon_1\vartheta_\alpha(v_1, v_2),$$
$$\varepsilon\vartheta_3(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \varepsilon_2\vartheta_\beta(v_1, v_2),$$

wo ε einen allen Thetafunctionen gemeinsamen Factor bedeutet und ε_i achte Einheitswurzeln sind, so folgen leicht die Formeln:

$$KM_0 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{O_{34}.O_4.O_5}{O_{03}.O_{12}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2}{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}(\vartheta_3'(v_1)_0\vartheta_\alpha'(v_2)_0 - \vartheta_3'(v_2)_0\vartheta_\alpha'(v_1)_0),$$

$$KM_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{O_{34}.O_4.O_5}{O_{03}.O_{12}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}(\vartheta_{24}'(v_1)_0\vartheta_\alpha'(v_2)_0 - \vartheta_{24}'(v_2)_0\vartheta_\alpha'(v_1)_0),$$

$$KM_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\frac{O_{34}^2.O_4^2.O_5^2}{O_{01}.O_{12}.O_{23}.O_2.O_{03}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2}{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}(\vartheta_\beta'(v_1)_0\vartheta_3'(v_2)_0 - \vartheta_\beta'(v_2)_0\vartheta_3'(v_1)_0),$$

$$KM_3 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\frac{O_{34}^2.O_4^2.O_5^2}{O_{01}.O_{12}.O_{23}.O_2.O_{03}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}(\vartheta_\beta'(v_1)_0\vartheta_{24}'(v_2)_0 - \vartheta_\beta'(v_2)_0\vartheta_{24}'(v_1)_0).$$

Wir wählen nun die Transformationen erstens so, dass wird:

$$\alpha = 24, \quad \beta = 3.$$

Dann folgt:

$$M_0 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{O_{34}.O_4.O_5}{O_{03}.O_{12}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},$$

$$M_1 = M_2 = 0,$$

$$M_3 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\frac{O_{34}^2.O_4^2.O_5^2}{O_{01}.O_{12}.O_{23}.O_2.O_{03}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2}.$$

Wir wählen die Transformationen zweitens so, dass wird:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 24.$$

Dann folgt:

$$M_0 = M_3 = 0.$$

$$M_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{O_{34}.O_4.O_5}{O_{03}.O_{12}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2},$$

$$M_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\frac{O_{34}^2.O_4^2.O_5^2}{O_{01}.O_{12}.O_{23}.O_2.O_{03}.O_0.O_{14}}\cdot\frac{\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{03}.\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}.$$

Solcher linearen Transformationen giebt es in jedem der beiden Fälle nach dem Modul zwei je vier. Für unseren Zweck genügt es, je zwei derselben herauszugreifen. Wir wollen nun annehmen, dass die fünf Functionen:

$$al_{01}(u_1, u_2), \quad al_4(u_1, u_2), \quad al_{14}(u_1, u_2), \quad al_{13}(u_1, u_2), \quad al_{24}(u_1, u_2)$$

nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt seien, dann geben die obigen Betrachtungen ein Mittel an die Hand, um unmittelbar die Entwickelung der zehn anderen Functionen $al_\alpha(u_1, u_2)$ zu erhalten.

Wir wollen dazu die Quotienten

$$\frac{al_\alpha(u_1, u_2)}{al_\alpha}, \quad \frac{al_\beta(u_1, u_2)}{al'_\beta(u_i)_0}$$

kurz bezeichnen durch $[\alpha]$, $[\beta]$. Dann bleiben die angedeuteten Entwickelungen ungeändert, wenn an Stelle von:

$$[01],\quad [4],\quad [14],\quad [13],\quad [24],\quad u_1,\quad u_2,\quad \varkappa^2,\quad \lambda^2,\quad \mu^2$$

resp. gesetzt wird:

$$\begin{array}{llllllllll}
[01], & [34], & [14], & [1], & [24], & u_1, & u_2, & \mu^2, & \lambda^2, & \varkappa^2, \\
[01], & [2], & [12], & \lambda[13], & \lambda[24], & \lambda u_1, & \lambda^3 u_2, & \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, & \frac{1}{\lambda^2}, & \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \\
[01], & [23], & [03], & \varkappa\lambda[04], & \varkappa\lambda[3], & \varkappa\lambda u_2, & \frac{\varkappa\lambda}{\mu^2}u_1, & \frac{\mu^2}{\lambda^2}, & \frac{\mu^2}{\varkappa^2}, & \mu^2, \\
[01], & [4], & [0, & \frac{\mu}{\lambda}[02], & \lambda\mu[3]. & \lambda\mu u_2, & \frac{\lambda\mu}{\varkappa^2}u_1, & \varkappa^2, & \frac{\varkappa^2}{\mu^2}, & \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}.
\end{array}$$

Da nun die Coefficienten in der Entwickelung nach Potenzen von u_1 und u_2, von einem numerischen Factor abgesehen, gerade die gesuchten Differentialquotienten sind, so folgt, dass wir uns auf die Herstellung derselben für die Functionen:

$$al_{01}(u_1, u_2),\quad al_4(u_1, u_2),\quad al_{14}(u_1, u_2),\quad al_{13}(u_1, u_2),\quad al_{24}(u_1, u_2)$$

beschränken können.

Ebenso einfach folgt, dass es bei den Functionen $al_{01}(u_1, u_2)$ und $al_4(u_1, u_2)$ genügt, die Differentialquotienten aufzustellen:

$$\frac{\partial^{2\varkappa} al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^n \partial u_2^{2\varkappa - n}} \qquad (\alpha = 01, 4),$$

bei welchen n der Reihe nach die Werthe annimmt: $2\varkappa$, $2\varkappa-1$, ... $\varkappa$.

Für unseren Zweck genügt die Herstellung der Differentialquotienten bis incl. den fünften. Es wird:

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3} = al'_{13}(u_1)_0(-1+2\varkappa^2-\lambda^2+\mu^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(-1+2\varkappa^2-\lambda^2+\mu^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2^2} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(-\lambda^2+2\varkappa^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{13}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^3} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(-\lambda^2\mu^2+2\varkappa^2\mu^2-2\varkappa^2\lambda^2+2\varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3} = al'_{24}(u_1)_0(-1+2\varkappa^2-\lambda^2+2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2} = al'_{24}(u_1)_0 2\varkappa^2\mu^2,$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2^2} = al'_{24}(u_1)_0\mu^2\varkappa^2(1+\lambda^2),$$

$$\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^3} = al'_{24}(u_1)_0 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2,$$

$$\frac{\partial^4 al_{01}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^4} = al_{01}(1-6\varkappa^2+6\lambda^2-6\mu^2+6\varkappa^2\mu^2-6\lambda^2\varkappa^2-6\mu^2\lambda^2+5\varkappa^4+\lambda^4+5\mu^4),$$

$$\frac{\partial^4 al_{01}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3 \partial u_2} = al_{01}(1-\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-5\varkappa^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{01}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^2\,\partial u_2^2} = al_{01}[(\lambda^2\mu^2-\mu^2\varkappa^2+\varkappa^2\lambda^2-\varkappa^2\lambda^2\mu^2)(1-\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2)-4\varkappa^2\mu^2(\lambda^2-\varkappa^2\mu^2)],$$

$$\frac{\partial^4 al_4(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^4} = al_4\,(\lambda^2-\mu^2)(4-4\varkappa^2+\lambda^2-5\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_4(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^3\,\partial u_2} = al_4\,(\lambda^2-\mu^2)(2\varkappa^2-5\varkappa^2\mu^2+\varkappa^2\lambda^2-2\varkappa^4),$$

$$\frac{\partial^4 al_4(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^2\,\partial u_2^2} = al_4\varkappa^2\,(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\mu^2-4\varkappa^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^4} = al_{14}(1-6\varkappa^2+4\lambda^2-6\mu^2-4\lambda^2\mu^2+6\mu^2\varkappa^2-4\varkappa^2\lambda^2+5\varkappa^4+5\mu^4),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^3\,\partial u_2} = al_{14}\varkappa^2\mu^2(-5+5\varkappa^2-4\lambda^2+5\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^2\,\partial u_2^2} = al_{14}\varkappa^2\mu^2(-1+\varkappa^2-4\lambda^2+\mu^2+4\varkappa^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1\,\partial u_2^3} = al_{14}\varkappa^2\mu^2(-2\lambda^2-2\lambda^2\mu^2+5\varkappa^2\mu^2-2\lambda^2\varkappa^2+2\varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 al_{14}(u_1,u_2)_0}{\partial u_2^4} = al_{14}\varkappa^2\mu^2(-4\mu^2\lambda^2+5\varkappa^2\mu^2-4\lambda^2\varkappa^2+4\varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{13}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^5} = al'_{13}(u_1)_0(1-16\varkappa^2+14\lambda^2-14\mu^2-14\mu^2\lambda^2+16\varkappa^2\mu^2-16\lambda^2\varkappa^2$$
$$+16\varkappa^4+\lambda^4+13\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{13}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^4\,\partial u_2} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(1-16\varkappa^2+6\lambda^2-6\mu^2-6\mu^2\lambda^2+16\varkappa^2\mu^2-16\lambda^2\varkappa^2$$
$$+16\varkappa^4+\lambda^4+5\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{13}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^3\,\partial u_2^2} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(\lambda^2+\lambda^4-\lambda^2\mu^2-10\varkappa^2\mu^2-6\lambda^2\varkappa^2-10\varkappa^2\lambda^2\mu^2$$
$$+16\mu^2\varkappa^4+10\varkappa^2\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{13}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^2\,\partial u_2^3} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(\lambda^2\mu^2-2\varkappa^2\mu^2+2\varkappa^2\lambda^2-20\varkappa^2\lambda^2\mu^2-\varkappa^4(\lambda^2-\mu^2)+\lambda^4(2\varkappa^2+\mu^2)$$
$$+\mu^4(2\varkappa^2-\lambda^2)+4\varkappa^4\lambda^2\mu^2-2\lambda^4\varkappa^2\mu^2+2\mu^4\varkappa^2\lambda^2+12\varkappa^4\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{13}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1\,\partial u_2^4} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(4\lambda^4\varkappa^2+\lambda^4\mu^2-4\varkappa^2\lambda^2\mu^2-16\varkappa^4\lambda^2\mu^2-4\lambda^4\varkappa^2\mu^2-12\mu^4\varkappa^2\lambda^2$$
$$+16\varkappa^4\mu^4+16\varkappa^4\mu^4\lambda^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{13}(u_1,u_2)_0}{\partial u_2^5} = al'_{13}(u_1)_0\mu^2(-24\varkappa^4\lambda^2\mu^2+16\lambda^4\mu^2\varkappa^2-16\mu^4\varkappa^2\lambda^2+\lambda^4\mu^4+16\varkappa^4\mu^4$$
$$+8\varkappa^4\lambda^4-16\lambda^4\mu^4\varkappa^2+24\mu^4\varkappa^4\lambda^2-24\varkappa^4\lambda^4\mu^2+16\varkappa^4\lambda^4\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^5} = al'_{24}(u_1)_0(1-16\varkappa^2+14\lambda^2-16\mu^2-16\lambda^2\mu^2+24\mu^2\varkappa^2-16\varkappa^2\lambda^2+16\varkappa^4$$
$$+\lambda^4+16\mu^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^4\,\partial u_2} = al'_{24}(u_1)_0 4\varkappa^2\mu^2(-3+4\varkappa^2-3\lambda^2+4\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^3\,\partial u_2^2} = al'_{24}(u_1)_0\varkappa^2\mu^2(-1+2\varkappa^2-10\lambda^2+2\mu^2+2\lambda^2\mu^2+12\mu^2\varkappa^2+2\varkappa^2\lambda^2-\lambda^4),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2^3} = al'_{24}(u_1)_0 2\varkappa^2\mu^2(-\lambda^2-2\lambda^2\mu^2+5\mu^2\varkappa^2-2\varkappa^2\lambda^2-\lambda^4+5\varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2^4} = al'_{24}(u_1)_0\varkappa^2\mu^2(-4\lambda^2\mu^2+5\mu^2\varkappa^2-4\varkappa^2\lambda^2+14\varkappa^2\lambda^2\mu^2-4\varkappa^2\lambda^4-4\mu^2\lambda^4 +5\varkappa^2\lambda^4\mu^2),$$

$$\frac{\partial^5 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^5} = al'_{24}(u_1)_0 4\varkappa^2\lambda^2\mu^2(-2\mu^2\lambda^2+3\varkappa^2\mu^2-2\lambda^2\varkappa^2+3\varkappa^2\lambda^2\mu^2).$$

Soviel über die hyperelliptischen Functionen!

Im 65. Bande dieses Journals stellt Herr **Koenigsberger** folgende Formeln auf:

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_i^2} = \frac{\vartheta_5''(v_i)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_1'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\frac{\vartheta_1^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} + \frac{\vartheta_3'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\frac{\vartheta_3^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} + \frac{\vartheta_{13}'(v_i)_0^2}{\vartheta_5^2}\frac{\vartheta_{13}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)},$$

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{\vartheta_5''(v_1, v_2)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_1'(v_1)_0\vartheta_1'(v_2)_0}{\vartheta_5^2}\frac{\vartheta_1^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} + \frac{\vartheta_3'(v_1)_0\vartheta_3'(v_2)_0}{\vartheta_5^2}\frac{\vartheta_3^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} + \frac{\vartheta_{13}'(v_1)_0\vartheta_{13}'(v_2)_0}{\vartheta_5^2}\frac{\vartheta_{13}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)}.$$

Hieraus ergeben sich nach bekannten Regeln die entsprechenden für die übrigen neun geraden Thetafunctionen.

Eine leichte Betrachtung zeigt, dass diese Formeln richtig bleiben, wenn wir uns die Differentiation links und rechts nach den Grössen u an Stelle der Grössen v ausgeführt denken. Aus den früher angegebenen Formeln für die zweiten Differentialquotienten der hyperelliptischen Functionen für die Nullwerthe der Argumente ergeben sich dann leicht die entsprechenden für die Differentialquotienten des Logarithmus der Thetafunctionen vermöge der Formeln:

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_a(v_1, v_2)_0}{\partial u_i^2} = \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_i^2} + \frac{al_a''(u_i)_0}{al_a},$$

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta_a(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{al_a''(u_1, u_2)_0}{al_a}.$$

Mit Hülfe weniger Schlüsse ergiebt sich hieraus der

Lehrsatz:

Sämmtliche Differentialquotienten des Logarithmus einer geraden Thetafunction nach den Grössen u_1 und u_2 für die Nullwerthe der Argumente sind von den Differentialquotienten vierter Ordnung an ganze rationale Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2.

Die lineare Transformation giebt dann wieder eine grosse Reihe von Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der Logarithmen der einzelnen Thetafunctionen. Die Betrachtungen, die zu ihnen führen, sind ganz analog wie bei den hyperelliptischen Functionen. Wir begnügen uns damit, einige Resultate einfach anzuführen. Denken wir uns die beiden Functionen $\log\vartheta_5(v_1, v_2)$ und $\log\vartheta_{14}(v_1, v_2)$ nach Potenzen von u_1 und u_2 entwickelt und sehen von den Gliedern nullter und zweiter Ordnung ab, so bleiben die Entwickelungen richtig, wenn gesetzt wird an Stelle von:

$$\begin{array}{lllllll}
\log\vartheta_5\,(v_1, v_2), & \log\vartheta_{14}(v_1, v_2), & u_1, & u_2, & \varkappa^2, & \lambda^2, & \mu^2: \\
\log\vartheta_4\,(v_1, v_2), & \log\vartheta_{14}(v_1, v_2), & u_1, & u_2, & \lambda^2, & \mu^2, & \varkappa^2, \\
\log\vartheta_{34}(v_1, v_2), & \log\vartheta_{14}(v_1, v_2), & u_1, & u_2, & \lambda^2, & \varkappa^2, & \mu^2, \\
\log\vartheta_2\,(v_1, v_2), & \log\vartheta_{03}(v_1, v_2), & \mu u_1, & \mu^3 u_2, & \frac{\varkappa^2}{\mu^2}, & \frac{\lambda^2}{\mu^2}, & \frac{1}{\mu^2}, \\
\log\vartheta_{01}(v_1, v_2), & \log\vartheta_0\,(v_1, v_2), & \varkappa u_1, & \varkappa^3 u_2, & \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}, & \frac{\mu^2}{\varkappa^2}, & \frac{1}{\varkappa^2}, \\
\log\vartheta_{23}(v_1, v_2), & \log\vartheta_{12}(v_1, v_2), & \lambda u_1, & \lambda^3 u_2, & \frac{1}{\lambda^2}, & \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, & \frac{\mu^2}{\lambda^2}.
\end{array}$$

Unter solchen Umständen genügt es, die Differentialquotienten der beiden Functionen $\log\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\log\vartheta_{14}(v_1, v_2)$ für die Nullwerthe der Argumente zu berechnen, um sie für die übrigen Functionen auch zu haben.

Da aber die Entwickelung von $\log\vartheta_{14}(v_1, v_2)$, von den Gliedern nullter und zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn an Stelle von:

$$u_1, \quad u_2, \quad \varkappa^2, \quad \lambda^2, \quad \mu^2$$

gesetzt wird:

$$\varkappa\lambda\mu u_2, \quad \varkappa\lambda\mu u_1, \quad \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{1}{\mu^2},$$

so folgt unter Berücksichtigung der Transformationsformeln für die hyperelliptischen Functionen, dass wir uns auf die Differentialquotienten beschränken können:

$$\frac{\partial^{2\nu}\log\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^{2\varkappa - r}\partial u_2^r},$$

für welche r der Reihe nach die Werthe annimmt: 0, 1, ... $\varkappa$.

Für unsern speciellen Zweck genügt die Herstellung der vierten Differentialquotienten. Es ist:

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} = 2(\varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2\mu^2 - \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2 - \varkappa^4 - \mu^4),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^3 \partial u_2} = 2\varkappa^2\mu^2(1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} = 2\varkappa^2\mu^2(\lambda^2 - \varkappa^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_{14}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} = 2(-1 + \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 - \lambda^2\mu^2 - \mu^2\varkappa^2 - \varkappa^2\lambda^2),$$

$$\frac{\partial^4 \log \vartheta_{14}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^3 \partial u_2} = \frac{\partial^4 \log \vartheta_{14}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} = -2\varkappa^2\lambda^2\mu^2.$$

§ 2.

Um nun zu Differentialgleichungen zu gelangen, denen die Thetafunctionen Genüge leisten, gehen wir von den beiden bekannten Gleichungen aus:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2} = 2\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{12}}.$$

Wir hatten gesetzt:

$$v_1 = \varkappa_{11} u_1 + \varkappa_{12} u_2,$$
$$v_2 = \varkappa_{21} u_1 + \varkappa_{22} u_2.$$

Dann folgt, wobei wir uns von vornherein auf die Nullwerthe der Argumente v und u beschränken:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} = \varkappa_{1\varepsilon}^2 \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2} + 2\varkappa_{1\varepsilon}\varkappa_{2\varepsilon} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 \partial v_2} + \varkappa_{2\varepsilon}^2 \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} = \varkappa_{11}\varkappa_{12} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2} + (\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21}) \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 \partial v_2} + \varkappa_{21}\varkappa_{22} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_2^2}.$$

Mithin wird:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} = 4\pi i \left[\varkappa_{1\varepsilon}^2 \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}} + \varkappa_{1\varepsilon}\varkappa_{2\varepsilon} \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}} + \varkappa_{2\varepsilon}^2 \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}}\right],$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} = 2\pi i \Big[2\varkappa_{11}\varkappa_{12} \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}} + (\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21}) \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}$$
$$+ 2\varkappa_{21}\varkappa_{22} \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}} \Big].$$

Nun ist:

$$\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon_1}} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa} \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon_1}}.$$

Hierbei soll die Summe rechts nach $\varkappa$ genommen werden, so zwar, dass an Stelle von $\varkappa$ der Reihe nach gesetzt wird: $\varkappa$, λ, μ.

Setzen wir diese Werthe ein, so folgt:

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{du_\varepsilon^2} = 4\pi i\,\Sigma_\varkappa \frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\left(\varkappa_{1\varepsilon}^2\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}}+\varkappa_{1\varepsilon}\varkappa_{2\varepsilon}\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}}+\varkappa_{2\varepsilon}^2\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}}\right),$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_1\,\partial u_2} = 2\pi i\,\Sigma_\varkappa \frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\left(2\varkappa_{11}\varkappa_{12}\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{11}}+(\varkappa_{11}\varkappa_{22}+\varkappa_{12}\varkappa_{21})\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}}+2\varkappa_{21}\varkappa_{22}\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{22}}\right).$$

Die Klammern sind leicht zu berechnen. In der That, setzen wir:

$$\varkappa(v_1,v_2) = \frac{\vartheta_{23}(v_1,v_2).\vartheta_{01}(v_1,v_2)}{\vartheta_4(v_1,v_2).\vartheta_5(v_1,v_2)},\quad \lambda(v_1,v_2) = \frac{\vartheta_2(v_1,v_2).\vartheta_{23}(v_1,v_2)}{\vartheta_{34}(v_1,v_2).\vartheta_4(v_1,v_2)},$$

$$\mu(v_1,v_2) = \frac{\vartheta_{01}(v_1,v_2).\vartheta_2(v_1,v_2)}{\vartheta_5(v_1,v_2).\vartheta_{34}(v_1,v_2)},$$

so folgt, wenn die Differentialquotienten für die Nullwerthe der Argumente durch den Index 0 bezeichnet werden:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon}} = \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2\varkappa(v_1,v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^2},\quad \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau_{12}} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial^2\varkappa(v_1,v_2)_0}{\partial v_1\,\partial v_2},$$

und analoge Formeln ergeben sich für die Grössen λ und μ.

Dann ergiebt sich aber vermöge einer einfachen Betrachtung:

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} = \Sigma_\varkappa\frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\frac{\partial^2\varkappa(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2},$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_1\partial u_2} = \Sigma_\varkappa\frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\frac{\partial^2\varkappa(v_1,v_2)_0}{\partial u_1\partial u_2}.$$

In diesen Formeln können die Factoren der Grössen $\frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial\varkappa}$ etc. vermöge der Entwickelungen, die im ersten Paragraphen angestellt sind, mit leichter Mühe berechnet werden. Es ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_1^2} = -2\Sigma_\varkappa\frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\varkappa(1-\varkappa^2),$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_1\partial u_2} = -\Sigma_\varkappa\frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\varkappa(1-\varkappa^2)(\mu^2+\lambda^2),$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_2^2} = -2\Sigma_\varkappa\frac{\partial\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial\varkappa}\varkappa(1-\varkappa^2)\lambda^2\mu^2.$$

Wir gehen nun zu den vierten Differentialquotienten über.

Einerseits ergeben sich für dieselben die Formeln:

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial v_\varepsilon^4} = -16\pi^2\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon}^2},$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial v_\varepsilon^3\partial v_{\varepsilon+1}} = -8\pi^2\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial\tau_{\varepsilon\varepsilon}\partial\tau_{12}},$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial v_1^2\partial v_2^2} = -16\pi^2\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial\tau_{11}\partial\tau_{22}} = -4\pi^2\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)}{\partial\tau_{12}^2}.$$

Andererseits aber wird:

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_i^4}\varkappa_{i\varepsilon}^4 + 4\sum_1^2{}_i \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_i^3\partial v_{i+1}}\varkappa_{i\varepsilon}^3\varkappa_{i+1\varepsilon} + 6\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_1^2\partial v_2^2}\varkappa_{1\varepsilon}^2\varkappa_{2\varepsilon}^2,$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3\partial u_{\varepsilon+1}} = \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_i^4}\varkappa_{i\varepsilon}^3\varkappa_{i\varepsilon+1} + \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_i^3\partial v_{i+1}}(\varkappa_{i\varepsilon}\varkappa_{i+1\varepsilon+1} + 3\varkappa_{i+1\varepsilon}\varkappa_{i\varepsilon+1})\varkappa_{i\varepsilon}^2$$
$$+ 3\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_1^2\partial v_2^2}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21})\varkappa_{1\varepsilon}\varkappa_{2\varepsilon},$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_1^2\partial u_2^2} = \sum_1^2{}_i \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_i^4}\varkappa_{i1}^2\varkappa_{i2}^2 + 2\sum_1^2{}_i \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_i^3\partial v_{i+1}}\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21})$$
$$+ \frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial v_1^2\partial v_2^2}(\varkappa_{11}^2\varkappa_{22}^2 + 4\varkappa_{11}\varkappa_{12}\varkappa_{21}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}^2\varkappa_{21}^2).$$

Mithin ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = -16\pi^2\Big[\sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2}\varkappa_{i\varepsilon}^4 + 2\sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}\partial \tau_{12}}\varkappa_{i\varepsilon}^3\varkappa_{i+1\varepsilon}$$
$$+ 2\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{22}}\varkappa_{1\varepsilon}^2\varkappa_{2\varepsilon}^2 + \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2}\varkappa_{1\varepsilon}^2\varkappa_{2\varepsilon}^2\Big],$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3\partial u_{\varepsilon+1}} = -\ 8\pi^2\Big[2\sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2}\varkappa_{i\varepsilon}^3\varkappa_{i\varepsilon+1}$$
$$+ \sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}\partial \tau_{12}}\varkappa_{i\varepsilon}^2(\varkappa_{i\varepsilon}\varkappa_{i+1\varepsilon+1} + 3\varkappa_{i+1\varepsilon}\varkappa_{i\varepsilon+1})$$
$$+ 2\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{22}}\varkappa_{1\varepsilon}\varkappa_{2\varepsilon}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21}) + \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2}\varkappa_{1\varepsilon}\varkappa_{2\varepsilon}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21})\Big],$$

$$\frac{\partial^4\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial u_1^2\partial u_2^2} = -16\pi^2\Big[\sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2}\varkappa_{i1}^2\varkappa_{i2}^2 + \sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}\partial \tau_{12}}\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21})$$
$$+ \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{22}}(\varkappa_{11}^2\varkappa_{22}^2 + \varkappa_{12}^2\varkappa_{21}^2) + \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2}\varkappa_{11}\varkappa_{12}\varkappa_{21}\varkappa_{22}\Big]$$
$$= -\ 4\pi^2\Big[4\sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}^2}\varkappa_{i1}^2\varkappa_{i2}^2 + 4\sum_1^2{}_i \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ii}\partial \tau_{12}}\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21})$$
$$+ 8\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{22}}\varkappa_{11}\varkappa_{12}\varkappa_{21}\varkappa_{22} + \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{12}\varkappa_{21})^2\Big].$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ik}^2} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{ik}}\right)^2 + 2\Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \varkappa\partial \lambda}\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{ik}}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{ik}}$$
$$+ \Sigma_\varkappa \frac{\partial \vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \varkappa}\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{ik}^2},$$

$$\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \tau_{ik}\partial \tau_{lm}} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{ik}}\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{lm}} + \Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2\vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \varkappa\partial \lambda}\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{ik}}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{lm}} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \tau_{lm}}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{ik}}\right)$$
$$+ \Sigma_\varkappa \frac{\partial \vartheta_a(v_1,v_2)_0}{\partial \varkappa}\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{ik}\partial \tau_{lm}}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so folgt nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\Big(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\Big)^2$$
$$+2\Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}+\Sigma_\varkappa a_{\varkappa\varepsilon}\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3 \partial u_{\varepsilon+1}} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\cdot\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon \partial u_{\varepsilon+1}}$$
$$+\Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\Big(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}+\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}\Big)$$
$$+\Sigma_\varkappa b_{\varkappa\varepsilon}\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa},$$

$$\frac{\partial^4 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^2}$$
$$+\Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\Big(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^2}+\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^2}\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)$$
$$+\Sigma_\varkappa c_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa},$$

$$= \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\Big(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}\Big)^2+2\Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}\cdot\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}$$
$$+\Sigma_\varkappa d_\varkappa \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}.$$

In diesen Formeln sind die Coefficienten von $\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}$, $\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}$ bekannte Functionen der Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, dagegen sind die Grössen $a_{\varkappa\varepsilon}$, $b_{\varepsilon\varkappa}$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ einstweilen noch unbekannt.

Greifen wir eine derselben heraus, z. B. $a_{\varkappa 1}$, so folgt:

$$a_{\varkappa 1} = -16\pi^2\Big[\varkappa_{11}^4\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{11}^2}+2\varkappa_{11}^3\varkappa_{21}\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{12}}+2\varkappa_{11}\varkappa_{21}^3\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{22}\partial \tau_{12}}+2\varkappa_{11}^2\varkappa_{21}^2\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{22}}$$
$$+\varkappa_{11}^2\varkappa_{21}^2\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{12}^2}+\varkappa_{21}^4\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{22}^2}\Big].$$

Nun ist:

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{01}}{\vartheta_4\vartheta_5}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{ik}^2} = \varkappa\Big[\frac{\partial^2 \log \vartheta_{23}}{\partial \tau_{ik}^2}+\frac{\partial^2 \log \vartheta_{01}}{\partial \tau_{ik}^2}-\frac{\partial^2 \log \vartheta_4}{\partial \tau_{ik}^2}-\frac{\partial^2 \log \vartheta_5}{\partial \tau_{ik}^2}\Big]$$
$$+\varkappa\Big[\frac{\partial \log \vartheta_{23}}{\partial \tau_{ik}}+\frac{\partial \log \vartheta_{01}}{\partial \tau_{ik}}-\frac{\partial \log \vartheta_4}{\partial \tau_{ik}}-\frac{\partial \log \vartheta_5}{\partial \tau_{ik}}\Big]^2,$$

und eine ähnliche Formel ergiebt sich für:

$$\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \tau_{ik}\, \partial \tau_{lm}}.$$

Dann folgt aber leicht:

$$\begin{aligned}
a_{\varkappa 1} = \varkappa\Big[&\frac{\partial^4 \log \vartheta_{23}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} + \frac{\partial^4 \log \vartheta_{01}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} - \frac{\partial^4 \log \vartheta_4(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} - \frac{\partial^4 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} \\
&+ 2\Big(\frac{\partial^2 \log \vartheta_{23}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2 \log \vartheta_{01}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)^2 - 2\Big(\frac{\partial^2 \log \vartheta_4(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)^2 \\
&- 2\Big(\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 \log \vartheta_{23}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \log \vartheta_{01}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} \\
&- \frac{\partial^2 \log \vartheta_4(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}\Big)^2\Big].
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise sind die übrigen unbekannten Grössen auszudrücken.

Unter Berücksichtigung der im ersten Paragraphen entwickelten Formeln ergeben sich die Resultate:

$$a_{\varkappa 1} = 4\varkappa\varkappa_1^2\Big(1 - 3\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$a_{\lambda 1} = 4\lambda\lambda_1^2\Big(1 - \varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$a_{\varkappa 2} = 4\varkappa\varkappa_1^2\lambda^2\mu^2\Big(\lambda^2\mu^2 - \varkappa^2\mu^2 + \lambda^2\varkappa^2 - 3\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$a_{\lambda 2} = 4\lambda\lambda_1^2\mu^2\varkappa^2\Big(\lambda^2\mu^2 - \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2 - 3\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - 2\frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$b_{\varkappa 1} = 2\varkappa\varkappa_1^2\Big(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2\mu^2 - 4\mu^2\varkappa^2 - 2\varkappa^2\lambda^2 - \mu^4 - \frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2) - 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$b_{\lambda 1} = 2\lambda\lambda_1^2\Big(\mu^2 + \varkappa^2 - \lambda^2\mu^2 - 2\mu^2\varkappa^2 - \varkappa^2\lambda^2 - \varkappa^4 - \mu^4 - \frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}(\varkappa^2 + \mu^2) - 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}\Big),$$

$$\begin{aligned}
b_{\varkappa 2} = 2\varkappa\varkappa_1^2\Big(&\varkappa^2\lambda^2\mu^2 + \lambda^4\mu^2 - \mu^4(\varkappa^2 - \lambda^2) - 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2(\lambda^2 + 2\mu^2) - \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2) \\
&- 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}\lambda^2\mu^2\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{\lambda 2} = 2\lambda\lambda_1^2\Big(&2\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2(\varkappa^2 + \mu^2) - 2\varkappa^4\mu^4 - \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5}(\varkappa^2 + \mu^2) \\
&- 2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}\mu^2\varkappa^2\Big),
\end{aligned}$$

$$c_\varkappa = 4\varkappa\varkappa_1^2(\lambda^2\mu^2 - \mu^4\varkappa^2 - 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2) - 4\varkappa\varkappa_1^2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2 + \mu^2),$$

$$c_\lambda = 4\lambda\lambda_1^2(\mu^2\varkappa^2 - \varkappa^4\mu^2 - \mu^4\varkappa^2 - \varkappa^2\lambda^2\mu^2) - 4\lambda\lambda_1^2\frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\mu^2 + \varkappa^2),$$

$$d_\varkappa = \varkappa\varkappa_1^2(4\lambda^2\mu^2 - \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2 - 2\lambda^4\varkappa^2 + \lambda^4\mu^2 - 4\mu^4\varkappa^2 - \mu^4\lambda^2 - 6\varkappa^2\lambda^2\mu^2)$$
$$- 2\varkappa\varkappa_1^2\left(\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\lambda^2\mu^2 + \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\lambda^2+\mu^2)\right),$$

$$d_\lambda = \lambda\lambda_1^2(\lambda^2\mu^2 + 2\mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2 - 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - 3\varkappa^4\mu^2 - 3\varkappa^2\mu^4 - 2\varkappa^4\lambda^2 - 2\mu^4\lambda^2)$$
$$- 2\lambda\lambda_1^2\left(\frac{\vartheta_5''(u_1)_0}{\vartheta_5}\mu^2\varkappa^2 + \frac{\vartheta_5''(u_2)_0}{\vartheta_5} + \frac{\vartheta_5''(u_1, u_2)_0}{\vartheta_5}(\mu^2+\varkappa^2)\right).$$

Die Grössen mit dem Index μ folgen aus den Grössen mit dem Index $\varkappa$ durch Vertauschung von $\varkappa$ und μ.

In diesen Formeln befinden sich die Differentialquotienten der Function $\vartheta_5(v_1, v_2)$ genommen nach den Grössen u_1 und u_2 für die Nullwerthe der Argumente. An ihrer Stelle können vermöge des ersten Paragraphen unmittelbar die Differentialquotienten einer beliebigen Function $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ eingeführt werden. Wir denken uns diese Operation wirklich ausgeführt, dann sind wir am Ziel. In der That setzen wir in dem Formelsystem, welches wir zuletzt für die Grössen $\frac{\partial^4\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^k \partial u_2^l}$ gefunden haben, auf den linken Seiten die Werthe ein, die sich aus dem ersten Paragraphen ergeben, und ersetzen sodann die Ausdrücke $\frac{\partial^2\vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_i \partial u_k}$ durch die Differentialquotienten nach den Grössen $\varkappa$, λ, μ, was auch unmittelbar durchführbar ist, so erhalten wir die Differentialgleichungen, denen die zehn Functionen ϑ_α, angesehen als Functionen von $\varkappa$, λ, μ, Genüge leisten, und damit die Lösung eines Theiles des gestellten Problems.

Für den Fall $\alpha = 5$ sollen die Differentialgleichungen wirklich aufgestellt werden. Wir wollen dazu unter den Grössen $a'_{\varkappa 1}$, $b'_{\varkappa 1}$, $c'_\varkappa$, ... Grössen verstehen, die aus den Grössen $a_{\varkappa 1}$, $b_{\varkappa 1}$, $c_\varkappa$, ... durch Fortlassung der zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^k \partial u_2^l}$ entstehen, dann ergeben sich die Gleichungen:

$$2\Sigma\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\varkappa^2\varkappa_1^4 + 4\Sigma\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa\partial\lambda}\varkappa\lambda\varkappa_1^2\lambda_1^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}a'_{\varkappa 1} + \frac{2}{\vartheta_5}\left[\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\right]^2$$
$$= \vartheta_5(\varkappa^2 - \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2\mu^2 - \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2 - \varkappa^4 - \mu^4),$$

$$2\Sigma\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\varkappa^2\varkappa_1^4\lambda^4\mu^4 + 4\Sigma\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa\partial\lambda}\varkappa^3\lambda^3\varkappa_1^2\lambda_1^2\mu^4 + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}a'_{\varkappa 2} + \frac{2}{\vartheta_5}\left[\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\lambda^2\mu^2\right]^2$$
$$= \vartheta_5\varkappa^2\mu^2(\mu^2\lambda^2 - \varkappa^2\mu^2 + \lambda^2\varkappa^2 - \lambda^4 + \lambda^4\varkappa^2 + \lambda^4\mu^2 - \varkappa^2\lambda^2\mu^2 - \varkappa^2\lambda^4\mu^2),$$

$$\Sigma\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa^2}\varkappa^2\varkappa_1^4(\lambda^2 + \mu^2) + \Sigma\frac{\partial^2\vartheta_5}{\partial\varkappa\partial\lambda}\varkappa\lambda\varkappa_1^2\lambda_1^2(\varkappa^2 + \lambda^2 + 2\mu^2) + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}b'_{\varkappa 1}$$
$$+ \frac{1}{\vartheta_5}\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\Sigma\frac{\partial\vartheta_5}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2) = \vartheta_5\varkappa^2\mu^2(1 - \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2),$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 \lambda^2 \mu^2 (\lambda^2 + \mu^2) + \Sigma \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 \mu^2 (\lambda^2 \mu^2 + \mu^2 \varkappa^2 + 2\varkappa^2 \lambda^2) + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} b'_{\varkappa^2}$$

$$+ \frac{1}{\vartheta_5} \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \lambda^2 \mu^2 \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) = \vartheta_5 \varkappa^2 \mu^2 (\lambda^2 \mu^2 - \mu^2 \varkappa^2 + \varkappa^2 \lambda^2 - \varkappa^2 \lambda^2 \mu^2),$$

$$2 \Sigma \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 \lambda^2 \mu^2 + 2 \Sigma \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 \mu^2 (\varkappa^2 + \lambda^2) + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} c'_\varkappa$$

$$+ \frac{1}{\vartheta_5} \left[\Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) \right]^2 - \frac{2}{\vartheta_5} \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \lambda^2 \mu^2 = \vartheta_5 \varkappa^2 \mu^2 (\lambda^2 - \varkappa^2 \mu^2),$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 (\lambda^2 + \mu^2)^2 + 2 \Sigma \frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 (\lambda^2 + \mu^2)(\mu^2 + \varkappa^2) + \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} d'_\varkappa$$

$$+ \frac{4}{\vartheta_5} \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \Sigma \frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \lambda^2 \mu^2 = 2 \vartheta_5 \varkappa^2 \mu^2 (\lambda^2 - \varkappa^2 \mu^2).$$

In ähnlicher Weise sind die Differentialgleichungen für die übrigen Thetafunctionen abzuleiten.

Diese Differentialgleichungen sind sowohl für sich von grosser Bedeutung, als auch lassen sich aus ihnen neue und wichtige Gleichungen ableiten.

In der That, setzen wir z. B.:

$$\vartheta_5 = \sqrt{\lambda \lambda_1 \mu_\varkappa \omega},$$

so erhalten wir eine Reihe von Differentialgleichungen, denen die Grösse ω Genüge leistet. Diese Grösse ω ist aber nichts anderes als der gemeinsame Nenner der Grössen τ_{ik} und steht andrerseits mit der Theorie der hyperelliptischen Integrale in engster Beziehung. Unter solchen Umständen kommt derselben eine hervorragende Bedeutung zu. Wir wollen die Differentialgleichungen, denen sie Genüge leistet, wirklich aufstellen und der Uebersichtlichkeit halber die Transformationsformeln angeben.

Es ist:

$$\frac{\partial \vartheta_5}{\partial \varkappa} = \frac{\lambda \lambda_1}{2 \mu_\varkappa \vartheta_5} \left(\mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} + \varkappa \omega \right),$$

$$\frac{\partial \vartheta_5}{\partial \lambda} = \frac{\mu_\varkappa}{2 \lambda_1 \vartheta_5} \left(\lambda \lambda_1^2 \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + (1 - 2\lambda^2) \omega \right),$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa^2} = \frac{\lambda \lambda_1}{2 \mu_\varkappa^3 \vartheta_5} \left(\mu_\varkappa^4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} + 2 \varkappa \mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} - \mu^2 \omega \right) - \frac{\lambda^2 \lambda_1^2}{4 \mu_\varkappa^2 \vartheta_5^3} \left(\mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} + \varkappa \omega \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \lambda^2} = \frac{\mu_\varkappa}{2 \lambda_1^3 \vartheta_5} \left(\lambda \lambda_1^4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda^2} + 2(1 - 2\lambda^2) \lambda_1^2 \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + (-3 + 2\lambda^2) \lambda \omega \right)$$

$$- \frac{\mu_\varkappa^2}{4 \lambda_1^3 \vartheta_5^3} \left(\lambda \lambda_1^2 \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + (1 - 2\lambda^2) \omega \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa \partial \lambda} = \frac{1}{2\mu_\varkappa \lambda_1 \vartheta_5}\left(\lambda \lambda_1^2 \mu_\varkappa^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} + \varkappa \lambda \lambda_1^2 \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \mu_\varkappa^2 (1-2\lambda^2)\frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} + \varkappa(1-2\lambda^2)\omega\right)$$
$$-\frac{\lambda}{4\vartheta_5^3}\left(\mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} + \varkappa \omega\right)\left(\lambda \lambda_1^2 \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + (1-2\lambda^2)\omega\right),$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial \varkappa \partial \mu} = \frac{\lambda \lambda_1}{2\mu_\varkappa^3 \vartheta_5}\left(\mu_\varkappa^4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \mu} - \mu \mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} + \varkappa \mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \varkappa \mu \omega\right)$$
$$-\frac{\lambda^2 \lambda_1^2}{4\mu_\varkappa^2 \vartheta_5^3}\left(\mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} + \varkappa \omega\right)\left(\mu_\varkappa^2 \frac{\partial \omega}{\partial \mu} - \mu \omega\right).$$

Die fehlenden Differentialquotienten entstehen aus den obigen durch Vertauschung von $\varkappa$ und μ.

Mithin ergeben sich für ω die Differentialgleichungen:

$$\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 + 2\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 + \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 (5 - 5\varkappa^2 - 3\lambda^2 - 3\mu^2)$$
$$= 4\omega(-1 + \Sigma(2\varkappa^2 - \varkappa^2\lambda^2 - \varkappa^4)),$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} \varkappa_1^4 \lambda^2 \mu^2 + 2\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 \mu^2 + \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa} (\lambda^2\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2 - 9\varkappa^2\lambda^2\mu^2)$$
$$= 4\omega(-4\varkappa^2\lambda^2\mu^2 + \Sigma \varkappa^2\lambda^2),$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 (\lambda^2 + \mu^2) + \Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 (\varkappa^2 + \lambda^2 + 2\mu^2)$$
$$+ \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 (\varkappa^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2 - 5\lambda^2\mu^2 - 6\mu^2\varkappa^2 - 6\varkappa^2\lambda^2 - 2\lambda^4 - 2\mu^4)$$
$$= 2\omega(-4\varkappa^2\lambda^2\mu^2 + \Sigma(-\varkappa^2 + 6\varkappa^2\lambda^2 - 3(\varkappa^2\lambda^4 + \lambda^2\varkappa^4) + \varkappa^4)),$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 \lambda^2 \mu^2 (\lambda^2 + \mu^2) + \Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 \mu^2 (\lambda^2\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 + 2\varkappa^2\lambda^2)$$
$$+ \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \lambda^2 \mu^2 (3\varkappa^2 + 2\lambda^2 + 2\mu^2 - 3\lambda^2\mu^2 - 8\mu^2\varkappa^2 - 8\varkappa^2\lambda^2)$$
$$= 2\omega \varkappa^2\lambda^2\mu^2(-1 + \Sigma(5\varkappa^2 - 6\varkappa^2\lambda^2)),$$

$$2\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 \lambda^2 \mu^2 + 2\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 \mu^2 (\varkappa^2 + \lambda^2)$$
$$+ \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} c''_\varkappa - \frac{2}{\omega}\left(\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 + \omega m_1\right)\left(\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \lambda^2 \mu^2 + \omega m_3\right)$$
$$+ \frac{1}{2\omega}\left(\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) + \omega m_2\right)^2 = c,$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa^2} \varkappa^2 \varkappa_1^4 (\lambda^2 + \mu^2)^2 + 2\Sigma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varkappa \partial \lambda} \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 (\lambda^2 + \mu^2)(\mu^2 + \varkappa^2)$$
$$+ \Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} d''_\varkappa + \frac{2}{\omega}\left(\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 + \omega m_1\right)\left(\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 \lambda^2 \mu^2 + \omega m_3\right)$$
$$- \frac{1}{2\omega}\left(\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \varkappa} \varkappa \varkappa_1^2 (\lambda^2 + \mu^2) + \omega m_2\right)^2 = d.$$

Dabei ist gesetzt:

$$m_1 = 2-\varkappa^2-2\lambda^2-\mu^2, \quad m_3 = \varkappa^2\mu^2(1-3\lambda^2),$$

$$m_2 = \varkappa^2+\lambda^2+\mu^2-3\lambda^2\mu^2-\varkappa^2\mu^2-3\lambda^2\varkappa^2,$$

$$c''_\varkappa = 2\varkappa\varkappa_1^2\mu^2(\varkappa^2+3\lambda^2-\lambda^2\mu^2-\mu^2\varkappa^2-6\varkappa^2\lambda^2-2\lambda^4).$$

$$c''_\lambda = 4\lambda\lambda_1^2\varkappa^2\mu^2(2-\varkappa^2-3\lambda^2-\mu^2),$$

$$c = 4\varkappa^2\mu^2(-1+\varkappa^2+7\lambda^2+\mu^2-3\lambda^2\mu^2-\mu^2\varkappa^2-3\varkappa^2\lambda^2-3\lambda^4).$$

$$d''_\varkappa = \varkappa\varkappa_1^2(8\lambda^2\mu^2+\mu^2\varkappa^2+3\varkappa^2\lambda^2+2\lambda^4-8\lambda^4\varkappa^2-5\lambda^4\mu^2+2\mu^4-6\mu^4\varkappa^2$$
$$-7\mu^4\lambda^2-14\varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$d''_\lambda = \lambda\lambda_1^2(3\lambda^2\mu^2+6\mu^2\varkappa^2+3\varkappa^2\lambda^2+2\varkappa^4-8\varkappa^4\lambda^2-5\varkappa^4\mu^2+2\mu^4-5\mu^4\varkappa^2$$
$$-8\mu^4\lambda^2-14\varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$d = 4(-\lambda^2\mu^2-\varkappa^2\lambda^2+2\varkappa^4\lambda^2+\varkappa^4\mu^2+2\varkappa^2\lambda^4+2\mu^2\lambda^4+\mu^4\varkappa^2+2\mu^4\lambda^2+8\varkappa^2\lambda^2\mu^2$$
$$-3\lambda^4\mu^4-2\mu^4\varkappa^4-3\varkappa^4\lambda^4-4\varkappa^4\lambda^2\mu^2-4\lambda^4\varkappa^2\mu^2-4\mu^4\varkappa^2\lambda^2).$$

In den beiden Gleichungssystemen für die Grössen ϑ_5 und ω sind bei den Summen die Indices, nach denen zu summiren ist, der Einfachheit halber fortgelassen — es braucht nicht näher auseinander gesetzt zu werden, wie dieselben in den einzelnen Fällen lauten.

Im 95. Bande dieses Journals hat der Verfasser auf völlig verschiedenem Wege für dieselbe Grösse ω sechs Differentialgleichungen aufgestellt. Dieselben sind ihrer Form nach von den obigen verschieden; indessen ist es nicht schwer, die vier ersten der soeben gefundenen Gleichungen, nebst derjenigen, die durch Summation der beiden letzten Gleichungen entsteht, aus den am angegebenen Orte befindlichen abzuleiten. Multiplicirt man z. B. die Gleichungen 18, 20, 21, 22, 23 in der citirten Arbeit der Reihe nach mit $2\varkappa\varkappa_1^2(\varkappa^2-\lambda^2)$, $2\mu\mu_1^2(\mu^2-\lambda^2)$, $\varkappa^2\varkappa_1^2$, $\lambda^2\lambda_1^2$, $\mu^2\mu_1^2$ und addirt dieselben, so erhält man die erste der oben aufgestellten Gleichungen. Schwieriger gestaltet sich die Sache bei einer der beiden letzten Gleichungen. Dieselbe lässt sich aus den früheren nicht ableiten. Von grösstem Interesse ist die Anwendung der linearen Transformation der Thetafunctionen auf die soeben aufgestellten Gleichungen. Es möge hierauf nicht näher eingegangen werden, da der prinzipielle Theil in der citirten Arbeit erledigt ist.

§ 3.

Wir gehen jetzt zur Construction anderweitiger Differentialgleichungen über und betrachten dazu den Ausdruck:

$$\frac{\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_i}}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = f_\alpha^i(v_1, v_2)$$

und suchen nach Gleichungen, denen die Functionen $f_\alpha^i(v_1, v_2)$ für die Nullwerthe der Argumente v_1, v_2, als Functionen von $\varkappa$, λ, μ betrachtet, Genüge leisten.

Es ist:

$$f_\alpha^i(v_1, v_2) = \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)}{\partial v_i} + al_\alpha(u_1, u_2)\frac{\partial \log \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_i}.$$

Hieraus folgt für die Nullwerthe der Argumente:

$$\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} = \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2 \partial v_i} + 2\frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_\varepsilon}\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon \partial v_i},$$

$$\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^3 al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2 \partial v_i} + \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_2 \partial v_i}$$
$$+ \frac{\partial al_\alpha(u_1, u_2)_0}{\partial u_2}\frac{\partial^2 \log \vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial v_i}.$$

Andrerseits folgt für die Nullwerthe der Argumente ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen:

$$\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}, \quad \frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial v_1 \partial v_2} = 2\pi i \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}},$$

und somit ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} = -2\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2,$$

$$\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} = -\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2(\lambda^2+\mu^2),$$

$$\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^2} = -2\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\lambda^2\mu^2.$$

Schon hieraus ergeben sich interessante Beziehungen. In der That, setzen wir α das eine Mal gleich 3, ein anderes Mal gleich 24 und vergleichen die beiden Ausdrücke, die sich für die Differentialquotienten von $f_\alpha^i(v_1, v_2)$ ergeben haben, so erhalten wir die Gleichungen:

$$K_{1i}\frac{\partial^3 al_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^3} + K_{2i}\frac{\partial^3 al_3(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2} = -2\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_3^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2,$$

$$K_{1i}\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2^2} + K_{2i}\frac{\partial^3 al_{24}(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^3} = -2\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\lambda^2\mu^2,$$

oder da die Beziehungen bestehen:

$$f_3^i(v_1, v_2)_0 = K_{2i}\sqrt{\varkappa\varkappa_1\mu\mu_1\mu_\lambda\lambda_\varkappa}, \quad f_{24}^i(v_1, v_2)_0 = -K_{1i}\sqrt{\frac{\varkappa_1\mu_1\mu_\lambda\lambda_\varkappa}{\lambda}},$$

ergeben sich die Gleichungen:

$$2\sqrt{\varkappa\lambda\mu}\,f_{24}^i(v_1, v_2)_0 = 2\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_3^i(v_1, v_2)_0}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2 + f_3^i(v_1, v_2)_0(\varkappa^2+\mu^2),$$

$$2\sqrt{\varkappa^3\lambda^3\mu^3}\,f_3^i(v_1, v_2)_0 = 2\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\lambda^2\mu^2 + f_{24}^i(v_1, v_2)_0\mu^2\varkappa^2(1+\lambda^2).$$

Hieraus folgen einige interessante Beziehungen zwischen den Grössen K_{1i}, K_{2i}. Es ist:

$$\frac{\partial f_3^i(v_1, v_2)_0}{\partial\varkappa} = \frac{\sqrt{\varkappa\varkappa_1\mu\mu_1\mu_\lambda\lambda_\varkappa}}{2\varkappa\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2}\left(2\varkappa\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2\frac{\partial K_{2i}}{\partial\varkappa} + (2\varkappa^2-\lambda^2+2\varkappa^2\lambda^2-3\varkappa^4)K_{2i}\right),$$

$$\frac{\partial f_3^i(v_1, v_2)_0}{\partial\lambda} = \frac{\sqrt{\varkappa\varkappa_1\mu\mu_1\mu_\lambda\lambda_\varkappa}}{2\mu_\lambda^2\lambda_\varkappa^2}\left(2\mu_\lambda^2\lambda_\varkappa^2\frac{\partial K_{2i}}{\partial\lambda} + \lambda(\varkappa^2-2\lambda^2+\mu^2)K_{2i}\right),$$

$$\frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial\varkappa} = -\frac{\sqrt{\varkappa_1\mu_1\mu_\lambda\lambda_\varkappa}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2}\left(2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2\frac{\partial K_{1i}}{\partial\varkappa} + \varkappa(1-2\varkappa^2+\lambda^2)K_{1i}\right),$$

$$\frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial\lambda} = -\frac{\sqrt{\varkappa_1\mu_1\mu_\lambda\lambda_\varkappa}}{2\lambda^{\frac{3}{2}}\lambda_\varkappa^2\mu_\lambda^2}\left(2\lambda\lambda_\varkappa^2\mu_\lambda^2\frac{\partial K_{1i}}{\partial\varkappa} + (\mu^2\varkappa^2-\lambda^4)K_{1i}\right).$$

Die beiden Differentialquotienten nach μ entstehen aus den Differentialquotienten nach $\varkappa$ durch Vertauschung von $\varkappa$ und μ.

Mithin ergeben sich die Gleichungen:

$$K_{1i} = -\Sigma_\varkappa\frac{\partial K_{2i}}{\partial\varkappa}\varkappa\varkappa_1^2 + K_{2i}(-2+\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2),$$

$$K_{2i} = -\Sigma\frac{\partial K_{1i}}{\partial\varkappa}\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa} + K_{1i}.$$

Diese Formeln können aus den Gleichungen, die Hr. ***Königsberger*** im ersten Bande der mathematischen Annalen auf völlig verschiedenem Wege ableitet, unmittelbar entwickelt werden; nur haben wir die Grösse, welche Hr. ***Königsberger*** durch K_{21} bezeichnet, durch $-K_{21}$ bezeichnet.

Die letzte der beiden ist die Gleichung (11.) in der schon citirten Arbeit des Verfassers. Hierbei möge bemerkt werden, dass in den Gleichungen (11.)—(14.) $-K_{21}$ an Stelle von K_{21} zu treten hat.

In ähnlicher Weise können die vierten Differentialquotienten behandelt werden. Für die Nullwerthe der Argumente ergiebt sich:

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = \frac{\partial^5 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4\partial v_i} + 4\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3}\frac{\partial^2\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon\partial v_i}$$
$$+4\frac{\partial al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon}\frac{\partial^4\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3\partial v_i},$$

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3\partial u_{\varepsilon+1}} = \frac{\partial^5 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3\partial u_{\varepsilon+1}\partial v_i} + 3\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2\partial u_{\varepsilon+1}}\frac{\partial^2\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon\partial v_i}$$
$$+\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3}\frac{\partial^2\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_{\varepsilon+1}\partial v_i}$$
$$+3\frac{\partial al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon}\frac{\partial^4\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2\partial u_{\varepsilon+1}\partial v_i}$$
$$+\frac{\partial al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_{\varepsilon+1}}\frac{\partial^4\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^3\partial v_i},$$

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1,v_2)_0}{\partial u_1^2\partial u_2^2} = \frac{\partial^5 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^2\partial u_2^2\partial v_i} + 2\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_1^2\partial u_2}\frac{\partial^2\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_2\partial v_i}$$
$$+2\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_1\partial u_2^2}\frac{\partial^2\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_1\partial v_i}$$
$$+2\frac{\partial al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_1}\frac{\partial^4\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_1\partial u_2^2\partial v_i}$$
$$+2\frac{\partial al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_2}\frac{\partial^4\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_1^2\partial u_2\partial v_i}.$$

In dem letzten Gleichungssystem können die Grössen $\frac{\partial^2\log\vartheta_5(v_1,v_2)_0}{\partial u_\varepsilon\partial v_i}$ vermöge eines der früheren Gleichungssysteme ersetzt werden durch die zweiten Differentialquotienten von $f_\alpha^i(v_1,v_2)$ nach den Grössen u_ε und den Differentialquotienten von $al_\alpha(u_1,u_2)$ nach den Grössen u_ε und v_i. Dabei ist:

$$\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2\partial v_i} = K_{1i}\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2\partial u_1} + K_{2i}\frac{\partial^3 al_\alpha(u_1,u_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2\partial u_2},$$

und in ähnlicher Weise sind sämmtliche Differentialquotienten zu bilden, in denen eine Differentiation nach v_i zu nehmen ist.

Hieraus folgt, dass die vierten Differentialquotienten der Function $f_\alpha^i(v_1,v_2)$ nach den Grössen u_1 und u_2 sich als lineare Functionen der zweiten Differentialquotienten derselben Function $f_\alpha^i(v_1,v_2)$ und der beiden Grössen K_{1i} und K_{2i} darstellen lassen. Die Coefficienten sind, von dem Factor $al'_\alpha(u_i)_0$ abgesehen, rationale Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2. Die Differentialquotienten sind hierbei für die Nullwerthe der Argumente zu bilden.

Wir wollen für die Function $f_{24}^i(v_1,v_2)$ die Darstellung wirklich durchführen.

Nach einigen Rechnungen ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial^4 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^4} - 2(2\varkappa^2 - \lambda^2 + 2\mu^2 - 1)\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} = -a l'_{24}(u_1)_0 K_{1i} \lambda_1^4,$$

$$\frac{\partial^4 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^4} - 8\varkappa^2\lambda^2\mu^2 \frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}$$
$$= a l'_{24}(u_1)_0 K_{1i} \varkappa^2\mu^2(-4\lambda^2\mu^2 + 5\mu^2\varkappa^2 - 4\varkappa^2\lambda^2 - 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - 4\varkappa^2\lambda^4 - 4\mu^2\lambda^4 + 5\varkappa^2\lambda^4\mu^2)$$
$$+ 4a l'_{24}(u_1)_0 K_{2i}\varkappa^2\lambda^2\mu^2(-2\lambda^2\mu^2 + \mu^2\varkappa^2 - 2\varkappa^2\lambda^2 + \varkappa^2\lambda^2\mu^2),$$

$$\frac{\partial^4 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^3 \partial u_2} - 3\varkappa^2\mu^2\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2} - (2\varkappa^2 - \lambda^2 + 2\mu^2 - 1)\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2}$$
$$= -a l'_{24}(u_1)_0 K_{1i}\varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2) - 2a l'_{24}(u_1)_0 K_{2i}\varkappa^2\lambda^2\mu^2,$$

$$\frac{\partial^4 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_2^3 \partial u_1} - 3\varkappa^2\mu^2\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} - \varkappa^2\lambda^2\mu^2\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$= 2a l'_{24}(u_1)_0 K_{1i}\varkappa^2\mu^2(-2\mu^2\lambda^2 + \varkappa^2\mu^2 - 2\lambda^2\varkappa^2 + \varkappa^2\lambda^2\mu^2)$$
$$+ 2a l'_{24}(u_1)_0 K_{2i}\varkappa^2\lambda^2\mu^2(-\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \mu^2\lambda^2 + 2\varkappa^2\mu^2 - \lambda^2\varkappa^2),$$

$$\frac{\partial^4 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} - 4\varkappa^2\mu^2\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} - \varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2)\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2}$$
$$= -4a l'_{24}(u_1)_0 K_{1i}\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - 2a l'_{24}(u_1)_0 K_{2i}\varkappa^2\lambda^2\mu^2(1+\lambda^2).$$

Indessen lässt sich das Problem noch weiter reduciren. In der That, die Grössen K_{1i} und K_{2i} können erstens durch die Grössen $f_3^i(v_1, v_2)_0$ und $f_{24}^i(v_1, v_2)_0$ ersetzt werden.

Berücksichtigen wir ferner die Relationen, die zwischen $f_3^i(v_1, v_2)$ und $f_{24}^i(v_1, v_2)$ aufgestellt worden sind, und ersetzen die zweiten Differentialquotienten der Function $f_{24}^i(v_1, v_2)$ nach den Grössen u_1 und u_2 durch die ersten Differentialquotienten nach den Grössen $\varkappa$, λ, μ, so folgt der Satz:

Sämmtliche vierten Differentialquotienten der Function $f_{24}^i(v_1, v_2)$ nach den Grössen u_1 und u_2 lassen sich als lineare Functionen der Grösse $f_{24}^i(v_1, v_2)$ und ihrer ersten Differentialquotienten nach den Grössen $\varkappa$, λ, μ darstellen. Die Coefficienten sind rationale Functionen von $\varkappa$, λ, μ. Die Differentialquotienten sind hierbei für die Nullwerthe der Argumente v_1, v_2 zu bilden.

Die Ausdrücke selbst sind nach dem Früheren unmittelbar herzustellen.

Wir wollen den letzten wirklich hinschreiben. Er nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\partial^4 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} + 4\varkappa^2\mu^2 \Sigma \frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2(\lambda^2 + \mu^2) + 2\varkappa^2\mu^2(1+\lambda^2)\Sigma\frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2$$
$$-2(1+\lambda^2)\Sigma\frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\varkappa\varkappa_1^2\lambda^2\mu^2 = \varkappa^2\mu^2(1-\lambda^2)^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0.$$

Das Analoge gilt für die andern Functionen.

Andrerseits ergiebt sich für die Nullwerthe der Argumente ähnlich wie im vorigen Paragraphen:

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^4} = -16\pi^2\Big(\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}^2} - 4\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}\Big),$$

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial v_\varepsilon^3 \partial v_{\varepsilon+1}} = -\ 8\pi^2\Big(\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}\partial \tau_{12}} - 2\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}$$
$$- 2\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}\Big),$$

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^2 \partial v_2^2} = -16\pi^2\Big(\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}\partial \tau_{22}} - \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}\Big),$$
$$= -\ 4\pi^2\Big(\frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}^2} - 2\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{12}}$$
$$- 4\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}}$$
$$- 4\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{22}}\,\frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \tau_{11}}\Big).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\Big(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\Big)^2$$
$$+ 2\Sigma_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\,\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\,\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} + \Sigma_\varkappa a_{\varkappa\varepsilon}\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}$$
$$- 16\Sigma_\varkappa \frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\,\varkappa\varkappa_1^2\ \Sigma_\varkappa \frac{\partial \log\vartheta_5(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\,\varkappa\varkappa_1^2$$

oder also:

$$\frac{\partial^4 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^4} = \Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\Big(\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\Big)^2$$
$$+ 2\Sigma_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\,\frac{\partial^2 \varkappa(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2}\,\frac{\partial^2 \lambda(v_1, v_2)_0}{\partial u_\varepsilon^2} + \Sigma_\varkappa a'_{\varkappa\varepsilon}\,\frac{\partial f_\alpha^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}.$$

Das Analoge findet für alle vierten Differentialquotienten der Function $f_\alpha^i(v_1, v_2)$ nach den Grössen u_ε Statt. Mit andern Worten wir finden das Resultat:

Die vierten Differentialquotienten der Function $f_\alpha^i(v_1, v_2)$ nach den Grössen u_ε ergeben sich aus den entsprechenden der Grössen $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, wenn an Stelle von $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$: $f_\alpha^i(v_1, v_2)$, an Stelle von $a_{\varkappa\varepsilon}$, $b_{\varkappa\varepsilon}$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ resp. gesetzt wird: $a'_{\varkappa\varepsilon}$, $b'_{\varkappa\varepsilon}$, $c'_\varkappa$, $d'_\varkappa$.

Hiermit sind wir aber am Ziel. Wir erhalten für die vierten Differentialquotienten einer jeden Function $f_\alpha^i(v_1, v_2)$ zwei von einander verschiedene Ausdrücke. Die Gleichsetzung derselben ergiebt für eine jede der Functionen $f_\alpha^i(v_1, v_2)$ sechs von einander verschiedene Differentialglei-

chungen, bei denen als unabhängige Veränderliche die Grössen $\varkappa$, λ, μ auftreten.

Für die Function $f_{24}^i(v_1, v_2)$ z. B. ergiebt sich als eine der Differentialgleichungen:

$$4\Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2}\, \varkappa^2 \varkappa_1^4 \lambda^2 \mu^2 + 4\Sigma_{\varkappa\lambda} \frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda}\, \varkappa \lambda \varkappa_1^2 \lambda_1^2 \mu^2 (\varkappa^2 + \lambda^2)$$
$$+ 2\Sigma \frac{\partial f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa}\, c_\varkappa^{(3)} = \mu^2 \varkappa^2 (1-\lambda^2)^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0.$$

Dabei ist gesetzt:

$$c_\varkappa^{(3)} = \varkappa \varkappa_1^2 (\lambda^2 \mu^2 + \mu^2 \varkappa^2 - \varkappa^2 \lambda^2 \mu^2 - \lambda^4 \mu^2), \quad c_\lambda^{(3)} = 2\lambda \lambda_1^4 \varkappa^2 \mu^2.$$

Ebenso einfach sind die andern Gleichungen zu entwickeln.

Auch aus den soeben näher definirten Gleichungen können grosse Kategorien neuer Gleichungen abgeleitet werden, vor allem die Gleichungen für die Grössen K_{1i}, K_{2i}. Auf die Wichtigkeit derselben für die Theorie der hyperelliptischen Integrale braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Es sollen diese Gleichungen hier nicht sämmtlich aufgestellt werden. Der Grund ist ein doppelter. Erstens sind keinerlei principielle Schwierigkeiten mehr zu überwinden und zweitens sind die Formen nicht so einfach, wie diejenigen, die der Verfasser im 95. Bande dieses Journals aufgestellt hat. Wir wollen uns damit begnügen, die Transformationsformeln für die Grösse K_{1i} anzugeben, und eine der sechs Differentialgleichungen hinzuschreiben, welchen diese Grösse Genüge leistet.

Setzt man:

$$\alpha = \frac{-\sqrt{\varkappa_1 \mu_1 \mu_\lambda \lambda_\varkappa}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}},$$

so wird:

$$\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa^2} = \frac{\alpha}{\varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}\Big(2\varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2 \frac{\partial^2 K_{1i}}{\partial \varkappa^2} + 2\varkappa(1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2)\frac{\partial K_{1i}}{\partial \varkappa}$$
$$+ \frac{(-\frac{1}{2}\varkappa^2 - \lambda^2 - \varkappa^4 - \lambda^4 + 5\varkappa^2\lambda^2 - \varkappa^4\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^4\varkappa^2) K_{1i}}{\varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}\Big),$$

$$\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda \mu_\lambda^2 \lambda_\varkappa^2}\Big(2\lambda \mu_\lambda^2 \lambda_\varkappa^2 \frac{\partial^2 K_{1i}}{\partial \lambda^2} + 2(\mu^2 \varkappa^2 - \lambda^4)\frac{\partial K_{1i}}{\partial \lambda}$$
$$+ \frac{(-\lambda^6\varkappa^2 - \lambda^6\mu^2 + 7\lambda^4\varkappa^2\mu^2 - \frac{1}{2}\lambda^8 - 3\lambda^2\mu^2\varkappa^4 - 3\varkappa^2\lambda^2\mu^4 + \frac{3}{2}\mu^4\varkappa^4) K_{1i}}{\lambda \lambda_\varkappa^2 \mu_\lambda^2}\Big),$$

$$\frac{\partial^2 f_{24}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \mu} = \frac{\alpha}{\varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}\Big(2\varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2 \frac{\partial^2 K_{1i}}{\partial \varkappa \partial \mu} + \varkappa(1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2)\frac{\partial K_{1i}}{\partial \mu} - \frac{\mu \varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}{\mu_1^2 \mu_\lambda^2}(1 - 2\mu^2 + \lambda^2)\frac{\partial K_{1i}}{\partial \varkappa}$$
$$- \frac{\mu\varkappa}{2}\, \frac{(1 - 2\mu^2 + \lambda^2)(1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2) K_{1i}}{\mu_1^2 \mu_\lambda^2}\Big),$$

$$\frac{\partial^2 f_{34}^i(v_1, v_2)_0}{\partial \varkappa \partial \lambda} = \frac{\alpha}{\lambda \mu_\lambda^2 \lambda_\varkappa^2}\Big(2\lambda \mu_\lambda^2 \lambda_\varkappa^2 \frac{\partial^2 K_{1i}}{\partial \varkappa \partial \lambda} + (\mu^2 \varkappa^2 - \lambda^4)\frac{\partial K_{1i}}{\partial \varkappa} + \frac{\lambda \varkappa \mu_\lambda^2 (1 - 2\varkappa^2 + \lambda^2)}{\varkappa_1^2}\frac{\partial K_{1i}}{\partial \lambda}$$
$$+ \frac{\varkappa(-2\mu^2\lambda^2 + \frac{1}{2}\varkappa^2\mu^2 + \frac{3}{2}\lambda^4 + \frac{5}{2}\varkappa^2\lambda^2\mu^2 - \mu^2\varkappa^4 - \varkappa^2\lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^6)K_{1i}}{\varkappa_1^2 \lambda_\varkappa^2}\Big).$$

Für die Grösse K_{1i} ergiebt sich dann als eine der sechs Differentialgleichungen:

$$\Sigma_\varkappa \frac{\partial^2 K_{1i}}{\partial \varkappa^2}\varkappa_1^4 + \Sigma_{\varkappa\lambda}\frac{\partial^2 K_{1i}}{\partial \varkappa \partial \lambda}\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}\frac{\lambda_1^2}{\lambda}(\varkappa^2 + \lambda^2) + \Sigma_\varkappa \frac{\partial K_{1i}}{\partial \varkappa}\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}(1 - 3\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2)$$
$$= (3 - \varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2)K_{1i}.$$

Dieselbe lässt sich aus den sechs Gleichungen, welche der Verfasser in der citirten Arbeit aufgestellt hat, unmittelbar ableiten.

Auch hier zeigt sich die lineare Transformation von grösstem Interesse. Wir verweisen wiederum auf die mehrfach genannte Arbeit.

Es ist klar, dass diese Gleichungen nur ein kleiner Bruchtheil derer sind, die sich in der Theorie der hyperelliptischen Functionen entwickeln lassen.

Nehmen wir ganz allgemein den Ausdruck:

$$\frac{\dfrac{\partial^n \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial v_1^r \partial v_2^{n-r}}}{\vartheta_5(v_1, v_2)_0},$$

wo n eine gerade Zahl ist, wenn $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ eine gerade Thetafunction ist, und zweitens eine ungerade, wenn der umgekehrte Fall stattfindet, so wird man auch für diese Grössen Differentialgleichungen ableiten können, indem man einerseits von dem Additionstheorem der Thetafunctionen ausgeht und andererseits von den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2} = 2\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{12}}.$$

§ 4.

Wir haben bei unseren Untersuchungen bisher als unabhängige Grössen die Grössen $\varkappa$, λ, μ angesehen. An ihrer Stelle können nun auch die Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} eingeführt werden. Es ist klar, dass auch in diesem Falle Differentialgleichungen existiren müssen. Die Form derselben ist complicirter, als die der vorhin besprochenen, dagegen bleibt die Methode ebenso einfach und naturgemäss. Wir machen in Bezug hierauf folgende Bemerkungen. Im ersten Paragraphen ist gezeigt worden, welches die Werthe der Differentialquotienten gewisser Functionen nach den Grössen u_1

und u_2 für die Nullwerthe der Argumente sind. Hieraus folgen sofort die Werthe der Differentialquotienten derselben Functionen nach den Grössen v_1 und v_2 vermöge der Beziehungen:

$$u_1 = K_{11}v_1 + K_{12}v_2,$$
$$u_2 = K_{21}v_1 + K_{22}v_2.$$

In diesen Differentialquotienten sind dann ausser den Grössen x, λ, μ die Grössen K_{1i}, K_{2i} rational enthalten.

Nehmen wir alsdann die Differentialbeziehungen hinzu:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{\varepsilon\varepsilon}}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2} = 2\pi i \frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\partial \tau_{12}},$$

so ergeben sich Differentialbeziehungen, bei denen die Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} als Unabhängige auftreten. Die Coefficienten sind Functionen von x, λ, μ, K_{1i}, K_{2i}. Die Elimination dieser Grössen ergiebt die gesuchten Gleichungen.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Sache bei den elliptischen Functionen.

Setzen wir

$$\eta = \vartheta_0(0, \tau),$$

so leistet η der Differentialgleichung Genüge:

$$(\eta^2\eta''' - 15\eta\eta'\eta'' + 30\eta'^3)^2 + 32(\eta\eta'' - 3\eta'^2)^3 = -\eta^{10}\pi^2(\eta\eta'' - 3\eta'^2)^2.$$

Diese Differentialgleichung ist zuerst von *Jacobi* im 36. Bande dieses Journals aufgestellt worden (Ges. Werke, Bd. 2, p. 173). In der Einleitung zu dieser Arbeit befindet sich folgender Passus: „Wenn man z. B. die Reihe

$$y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

betrachtet, deren Bildungsgesetz so einfach ist, so giebt es doch trotz dieser Einfachheit kein Mittel, um aus der Natur dieser Reihe selber zu erkennen, ob sie durch eine endliche Differentialgleichung, d. h. durch eine algebraische Gleichung zwischen ihr selbst, der unabhängigen Variablen und ihren Differentialquotienten definirt werden kann. Und wenn es möglich ist, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen eine solche Differentialgleichung zu finden, wie complicirt und indirect sind die dazu nöthigen Betrachtungen!"

Im Gegensatze zu vorstehenden Worten zeigt sich die auf Grund des Additionstheorems der Thetafunctionen entwickelte Methode als ebenso einfach wie übersichtlich.

Rostock, im Januar 1884.

Zur Theorie der symmetrischen Functionen.

(Von Herrn *A. H. Anglin* in Edinburgh.)

Es sei

$$\mathfrak{F}(x) = \prod_{i=1}^{i=m} (x - x_i) = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \mathfrak{f}_k x^{m-k}$$

und also $\mathfrak{f}_0 = 1$. Ferner sei $\mathfrak{F}'(x)$ die Ableitung von $\mathfrak{F}(x)$.

Dann ist gemäss der *Lagrange*schen Interpolationsformel:

$$1 = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\mathfrak{F}(x)}{(x-x_i)\mathfrak{F}'(x_i)} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k \mathfrak{f}_k x^{m-k} . \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{S}_{n-m} x^{-n},$$

wenn $\mathfrak{S}_{n-m}$ die symmetrische Function

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{x_i^{n-1}}{\mathfrak{F}'(x_i)}$$

bedeutet. Diese Functionen $\mathfrak{S}$ werden also durch die Recursionsformeln:

$$(A.) \qquad \sum_k (-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{r-k} = \delta_{0r} \qquad \left(\begin{array}{c} k = 0,\ 1,\ \dots\ m, \text{ jedoch mit der} \\ \text{Bedingung } k \leqq r; \\ \delta_{00} = 1,\ \delta_{0r} = 0, \text{ falls } r > 0 \text{ ist.} \end{array}\right)$$

aus den elementaren symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}$ bestimmt. Andererseits bestimmen sie sich aus der Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{S}_n x^{-n} = \prod_{i=1}^{i=m} \frac{x}{x - x_i},$$

wenn jeder der m Factoren rechts nach fallenden Potenzen von x entwickelt wird, in folgender Weise:

$$\mathfrak{S}_n = \sum_{r_1, r_2, \dots r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_m^{r_m} \qquad \left(\begin{array}{c} r_1,\ r_2,\ \dots\ r_m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \\ \text{mit der Bedingung:} \\ r_1 + r_2 + \dots + r_m = n \end{array}\right).$$

Da ferner gemäss der *Lagrange*schen Interpolationsformel

$$\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{h=1}^{h=m-k}(-1)^k \mathfrak{f}_k x^{m-h-k} x_i^{h-1}\frac{\mathfrak{G}(x_i)}{\mathfrak{F}'(x_i)}$$

der Rest ist, welcher bei der Division einer ganzen Function $\mathfrak{G}(x)$ durch $\mathfrak{F}(x)$ verbleibt, so erhält man den Rest der Division von x^{m+p} durch $\mathfrak{F}(x)$ in folgender einfachen Weise durch die symmetrischen Functionen $\mathfrak{S}$ dargestellt:

$$\sum_{k=0}^{k=m}\sum_{h=1}^{h=m-k}(-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{h+p} x^{m-h-k},$$

vorausgesetzt, dass $p \geqq 0$ ist *).

---

*) Anmerkung. Das Resultat findet sich auch in *Jacobis* Nachlass und ist in dem neulich erschienenen dritten Bande seiner Werke unter No. 23 veröffentlicht. Doch war Herrn *Anglins* (englisch abgefasstes) Manuscript der Redaction schon lange vorher zugegangen und ist nur, wegen der inzwischen erfolgten Publication der *Jacobi*schen Entwickelungen, bei der Uebertragung ins Deutsche wesentlich gekürzt worden. Die Herleitung kann aber noch vereinfacht werden. Es besteht nämlich die identische Gleichung:

$$(B.)\qquad x^{m+p} = \sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k \mathfrak{f}_k x^{m-k}.\sum_{l=0}^{l=p}\mathfrak{S}_l x^{p-l} + \sum_{k=0}^{k=m}\sum_{h=1}^{h=m-k}(-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{h+p} x^{m-h-k},$$

welche das vollständige Resultat der Division von x^{m+p} durch $\mathfrak{F}(x)$, nämlich sowohl den Quotienten als auch den Rest, mittels der symmetrischen Functionen $\mathfrak{S}$ darstellt. Zur Verification der Gleichung (*B.*) bedarf man nur der in den Recursionsformeln (*A.*) enthaltenen Definition der Grössen $\mathfrak{S}$; denn der Coefficient von x^g wird, wenn $g<m$ ist, in den beiden Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (*B.*):

$$\sum_{k=m-g}^{k=m}(-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{m-g-k+p} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{k=m-g-1}(-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{m-g-k+p},$$

und die Summe dieser beiden Summen wird gemäss den Formeln (*A.*) gleich Null; wenn aber $g \geqq m$ ist, so kommt x^g nur in dem ersten Summanden auf der rechten Seite von (*B.*) vor, und zwar mit dem Coefficienten:

$$\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k \mathfrak{f}_k \mathfrak{S}_{m-g-k+p},$$

dessen Werth gemäss den Formeln (*A.*) gleich $\delta_{0,m-g+p}$, also gleich *Null* ist, wenn $g<m+p$ ist, aber gleich *Eins* im Falle $g=m+p$. *Kronecker.*

Ueber die Klassenanzahl derjenigen ternären quadratischen Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist.

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

Erster Theil.

In meiner Inauguraldissertation *) habe ich nachgewiesen, dass zwei indefinite ternäre quadratische Formen desselben Geschlechts äquivalent sind, wenn die Invarianten dieser Formen ungerade und relativ prim sind. Im Folgenden soll nun ein anderer Specialfall, der in der Ueberschrift genannte, behandelt werden. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine ternäre quadratische Form für rationale Werthe der Variabeln verschwinden könne, sind von Herrn *Smith* ohne Beweis aufgestellt worden **). Für Formen ungerader Determinante, welche im Folgenden ausschliesslich zur Behandlung kommen, will ich hier zunächst diesen Beweis vorausschicken.

1. Es sei

$$f(x,x',x'') = ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'x''x+2b''xx' = \begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$$

eine primitive indefinite Form, deren Determinante

$$D = ab^2+a'b'^2+a''b''^2-aa'a''-2bb'b''$$

positiv sei, was vorauszusetzen erlaubt ist, da eine Aenderung der Vorzeichen aller Coefficienten auch das Vorzeichen der Determinante ändert. Die adjungirte Form (Contravariante) von f ist

$$\Omega F = \begin{pmatrix} b^2-a'a'', & b'^2-a''a, & b''^2-aa' \\ ab-b'b'', & a'b'-b''b, & a''b''-bb' \end{pmatrix},$$

wo Ω den grössten gemeinschaftlichen (positiven) Theiler der sechs eingeklammerten Coefficienten bedeutet. Die Form F ist wieder primitiv und

*) Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen. Zürich 1871.

**) Proceed. Roy. Soc. vol. XIII. Nr. 60.

indefinit; sie heisst die primitive Adjungirte von f und soll mit $\binom{A,\ A',\ A''}{B,\ B',\ B''}$ bezeichnet werden, so dass also $b^2-a'a'' = \Omega A$, u. s. w. Die Determinante D ist durch Ω^2 theilbar; sie sei $= \Omega^2\Delta$, diejenige von F ist dann $= \Omega\Delta^2$. Die Formen f der *Invarianten* Ω, Δ werden in *Geschlechter* eingetheilt nach den quadratischen Charakteren der Formen f, F in Bezug auf die Primfactoren von Ω und Δ resp.*).

Da äquivalente Formen dieselben Zahlen darstellen, so kann f so gewählt vorausgesetzt werden, dass a prim ist zu $2\Omega\Delta$, A'' prim zu $a\Omega\Delta$. Denn durch unimodulare Transformation kann zunächst der erste Coefficient a prim zu $2\Omega\Delta$ gemacht werden; sodann erhellt aus den Gleichungen

$$aA+b''B''+b'B' = \Omega\Delta,\quad aB''+b''A'+b'B = 0,\quad aB'+b''B+b'A'' = 0,$$
$$b'^2-a''a = \Omega A',\quad b''^2-aa' = \Omega A'',\quad B^2-A'A'' = a\Delta,$$

dass A', B, A'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben können, und durch die Substitution

$$x = y,\quad x' = \beta'y'+\gamma'y'',\quad x'' = \beta''y'+\gamma''y'',\quad (\beta'\gamma''-\gamma'\beta'' = 1)$$

bleibt a unverändert, A'' aber geht in $A'\beta''^2-2B\beta''\beta'+A''\beta'^2$ über und kann daher zu $a\Omega\Delta$ prim gemacht werden.

Um nun über die Auflösbarkeit der Gleichung

$$ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'x''x+2b''xx' = 0$$

in rationalen Zahlen zu entscheiden, multiplicire man sie mit aA'', wodurch sie übergeht in

$$A''(ax+b''x'+b'x'')^2-\Omega(A''x'-Bx'')^2+a\Omega\Delta x''^2 = 0;$$

d. h. es ist die Gleichung

$$\Omega A''u^2-v^2+a\Delta w^2 = 0$$

in rationalen Zahlen u, v, w aufzulösen. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Auflösbarkeit sind, in der *Gauss*ischen Bezeichnungsweise des quadratischen Charakters **):

1) A'' und a nicht beide negativ,

2) $\dfrac{a\Delta}{a^2}R\dfrac{a\Omega A''}{\beta\gamma}$, $-\dfrac{aA''\Omega\Delta}{\beta^2}R\dfrac{\beta}{a\gamma}$, $\dfrac{A''\Omega}{\gamma^2}R\dfrac{\gamma a\Delta}{a\beta}$,

---

*) *Eisenstein*, Neue Theoreme etc. Dieses Journal Bd. 35. *Smith*, On the orders etc. Phil. Tr. vol. 157.

**) Disq. ar. Art. 298.

wo α^2, β^2, γ^2 die grössten quadratischen Theiler von $a\Delta$, $aA''\Omega\Delta$, $A''\Omega$ resp. bedeuten. Die Bedingung 1) ist erfüllt, weil f indefinit ist. Um die drei Bedingungen 2) zu vereinfachen, führe ich die grössten in a, A'', Ω, Δ aufgehenden Quadrate a_1^2, A_1^2, Ω_1^2, Δ_1^2 ein, ausserdem das grösste in $\Omega_2\Delta_2$ aufgehende Quadrat E^2, indem ich setze

$$\Omega = \Omega_1^2\Omega_2, \quad \Delta = \Delta_1^2\Delta_2, \quad \Omega_2 = E\Omega_0, \quad \Delta_2 = E\Delta_0,$$

wodurch die Bedingungen 2) übergehen in

$$\frac{a\Delta_2}{a_1^2} R \frac{A''\Omega_0}{A_1^2}, \qquad -\frac{aA''\Omega_0\Delta_0}{a_1^2A_1^2} RE, \qquad \frac{A''\Omega_2}{A_1^2} R \frac{a\Delta_0}{a_1^2},$$

oder weil $A''\Omega_2 Ra$, $a\Delta_2 RA''$ ist, in

$$a\Delta_2 R\Omega_0, \quad -aA''\Omega_0\Delta_0 RE, \quad A''\Omega_2 R\Delta_0;$$

so dass die gesuchten Bedingungen lauten: Es muss sein (in *Legendre*schen Zeichen):

$$\left(\frac{f}{\omega}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{\omega}\right), \quad \left(\frac{F}{\delta}\right) = \left(\frac{\Omega_2}{\delta}\right), \quad \left(\frac{f}{\varepsilon}\right)\left(\frac{F}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{-\Omega_0\Delta_0}{\varepsilon}\right)$$

für jeden Primfactor ω von Ω_0, δ von Δ_0, ε von E.

Die Darstellbarkeit der Null durch eine indefinite ternäre quadratische Form hängt also bloss vom quadratischen Charakter dieser Form ab; daher ist die Null durch jede Form eines Geschlechtes darstellbar, wenn sie es durch eine Form desselben ist. Im Folgenden werde ich zur Abkürzung eine Form, welche für rationale Werthe der Variabeln (die nicht sämmtlich 0 sind) verschwinden kann, *Nullform* nennen. Nach dem Vorigen verstehen sich dann die Benennungen *Nullklasse* und *Nullgeschlecht* von selbst.

Bezeichnet man den grössten gemeinschaftlichen (positiven) Theiler von Ω und Δ mit Θ, denjenigen von $\frac{\Omega}{\Theta}$ und Θ mit Ω', den von $\frac{\Delta}{\Theta}$ und Θ mit Δ', so sind Ω' und Δ' relativ prim und gehen beide in Θ auf; daher kann man setzen

$$\Theta = \Theta'\Omega'\Delta', \quad \Omega = \Theta\Omega'\Omega'' = \Theta'\Omega'^2\Delta'\Omega'', \quad \Delta = \Theta\Delta'\Delta'' = \Theta'\Delta'^2\Omega'\Delta'',$$

wo $\Omega'\Omega''$ prim ist zu $\Delta'\Delta''$, Θ' prim zu $\Omega''\Delta''$. Ich werde aber im ersten und zweiten Theil dieser Abhandlung specieller voraussetzen, es seien *Θ', Ω', Δ', Ω'', Δ'' relative Primzahlen, ungerade und ohne quadratische Theiler.*

Damit f eine Nullform sei, ist alsdann nothwendig und hinreichend, dass

$$\left(\frac{f}{\omega}\right) = \left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{\omega}\right), \quad \left(\frac{F}{\delta}\right) = \left(\frac{\Theta'\Delta'\Omega''}{\delta}\right), \quad \left(\frac{f}{\theta'}\right)\left(\frac{F}{\theta'}\right) = \left(\frac{-\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''}{\theta'}\right)$$

sei für jeden Primfactor ω von $\Delta'\Omega''$, ϑ von $\Omega'\Delta''$, θ' von Θ'. Ist ν die Anzahl der Primfactoren von Θ, so giebt es 2^ν Nullgeschlechter der Invarianten Ω, Δ (welche alle wirklich existiren).

2. Zunächst suche ich die Nullformen durch Transformation zu vereinfachen. Jede Nullform lässt sich in eine ihr äquivalente

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & b', & 0 \end{pmatrix}$$

transformiren, in welcher der erste und letzte Coefficient Null sind *). Die Coefficienten der adjungirten Form

$$\begin{pmatrix} b^2-a'a'', & b'^2, & 0 \\ 0, & a'b', & -bb' \end{pmatrix}$$

sind durch Ω theilbar, also b' durch $\Theta'\Omega'\Delta'\Omega''$. Setzt man $b' = \Theta'\Omega'\Delta'\Omega''\beta$, so folgt aus

$$a'b'^2 = D = \Omega^2\Delta = \Theta'^3\Omega'^5\Delta'^4\Omega''^2\Delta''$$

oder

$$a'\beta^2 = \Theta'\Omega'^3\Delta'^2\Delta'',$$

dass a' durch $\Theta'\Omega'\Delta''$ theilbar ist. Es lässt sich jedoch zeigen, dass a' durch Ω'^3 theilbar ist. Wäre dies nicht der Fall, so müsste a' einen Primfactor p von Ω' nur in erster Potenz enthalten, und weil $b^2-a'a'' \equiv 0$ (mod. p^2), müssten a'' und b durch p theilbar sein, und die Form wäre nicht primitiv. Daher kann man setzen

$$a' = \Theta'\Omega'^3\Delta''\alpha^2, \quad \alpha\beta = \Delta'.$$

Da $b^2-a'a''$ durch Ω, also durch Δ' theilbar ist, so ist es auch theilbar durch α^2, und b und b' durch α; daher sind sämmtliche Coefficienten von ΩF theilbar durch α^2 und diejenigen von F durch α. Da aber F primitiv ist, ist $\alpha = 1$, $\beta = \Delta'$ und

$$a' = \Theta'\Omega'^3\Delta'', \quad b' = \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''.$$

Aus $b^2-a'a'' \equiv 0$ (mod. Ω) folgt ferner $b \equiv 0$ (mod. $\Theta'\Omega'$). Es sei $b = \Theta'\Omega'b_1$.

Ersetzt man x' durch $x'+kx''$, so geht die Nullform über in

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'k^2+2bk+a'' \\ a'k+b, & b', & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wo} \quad a'k+b = \Theta'\Omega'(\Omega'^2\Delta''k+b_1).$$

Man kann nun k so wählen, dass $\Omega'^2\Delta''k+b_1$ durch $\Delta'^2\Omega''$ theilbar wird. Dies geschehe, und der Quotient sei b_2, also $a'k+b = b_2b'$. Hierdurch erhält

*) *Gauss*, Disq. ar. Art. 274.

die Form die Gestalt

$$a'x'^2 + a_1''x''^2 + 2b'(b_2x' + x)x''$$

und geht in

$$a'x'^2 + a_1''x''^2 + 2b'x''x = \begin{pmatrix} 0, & a', & a_1'' \\ 0, & b', & 0 \end{pmatrix}$$

über, wenn man $x + b_2 x'$ durch x ersetzt.

Es bleibt jetzt noch übrig, den dritten Coefficienten a_1'' zu reduciren. $a'a_1''$ ist durch Ω, also a_1'' durch $\Delta'\Omega''$ theilbar; es sei $a_1'' = \Delta'\Omega''a_2''$. Ersetzt man x durch $x + k'x''$, so ändern sich die übrigen Coefficienten nicht, der dritte aber geht über in

$$a_1'' + 2b'k' = \Delta'\Omega''(a_2'' + 2\Theta k') = r\Delta'\Omega'',$$

und k' lässt sich so bestimmen, dass $0 < r \leqq 2\Theta$ wird.

Ist $r > \Theta$, so kann man noch die Substitution anwenden

$$x = y - \Omega'^2\Delta''y' - \tfrac{1}{2}(\Omega'^2\Delta'^2\Omega''\Delta'' + 1)y'', \quad x' = y' + \Delta'^2\Omega''y'', \quad x'' = y'',$$

wodurch $r - \Theta$ an Stelle von r tritt.

Durch unimodulare Transformationen lässt sich also unter den angegebenen Beschränkungen jede Nullform der Invarianten Ω, Δ auf die Gestalt bringen

$$f(r) = \begin{pmatrix} 0, & \Theta'\Omega'^3\Delta'', & r\Delta'\Omega'' \\ 0, & \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega'', & 0 \end{pmatrix}$$

mit der primitiven Adjungirten

$$F(r) = \begin{pmatrix} -r\Omega'\Delta'', & \Theta'\Delta'^3\Omega'', & 0 \\ 0, & \Theta'\Omega'^2\Delta'\Delta'', & 0 \end{pmatrix},$$

wo $0 < r \leqq \Theta$ und r prim zu Θ ist.

Eine solche Form möge der Kürze wegen *reducirt* heissen.

Zwei Formen $f(r)$ und $f(r')$ gehören in dasselbe Geschlecht, wenn die quadratischen Charaktere von r und r' in Bezug auf die ν Primfactoren von Θ übereinstimmen. Die Anzahl der reducirten Formen eines jeden Nullgeschlechts beträgt $2^{-\nu}\varphi(\Theta)$, wo φ die bekannte zahlentheoretische Function bedeutet.

3. Es ist nun zu untersuchen, ob zwei reducirte Formen $f(r)$ und $f(r')$ desselben Geschlechts noch äquivalent sein können, ob es also möglich sei, $f(r)$ in $f(r')$ zu transformiren durch eine Substitution

$$x = \alpha y + \beta y' + \gamma y'', \quad x' = \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'', \quad x'' = \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y''$$

der Determinante Eins. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass in ganzen Zahlen lösbar sei das System der Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl}
(1.) & 0 & = & \Theta'\Omega'^3\Delta''\alpha'^2 + r\Delta'\Omega''\alpha''^2 + 2\Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''\alpha''\alpha, \\
(2.) & \Theta'\Omega'^3\Delta'' & = & \Theta'\Omega'^3\Delta''\beta'^2 + r\Delta'\Omega''\beta''^2 + 2\Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''\beta''\beta, \\
(3.) & r'\Delta'\Omega'' & = & \Theta'\Omega'^3\Delta''\gamma'^2 + r\Delta'\Omega''\gamma''^2 + 2\Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''\gamma''\gamma, \\
(4.) & 0 & = & \Theta'\Omega'^3\Delta''\beta'\gamma' + r\Delta'\Omega''\beta''\gamma'' + \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''(\beta\gamma''+\gamma\beta''), \\
(5.) & \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega'' & = & \Theta'\Omega'^3\Delta''\gamma'\alpha' + r\Delta'\Omega''\gamma''\alpha'' + \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''(\gamma\alpha''+\alpha\gamma''), \\
(6.) & 0 & = & \Theta'\Omega'^3\Delta''\alpha'\beta' + r\Delta'\Omega''\alpha''\beta'' + \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''(\alpha\beta''+\beta\alpha'').
\end{array}$$

Die Auflösung dieses Systems theile ich ausführlich mit, da es hier wesentlich darauf ankommt, sich von der Allgemeinheit derselben überzeugen zu können.

Aus der Annahme $\alpha''=0$ und den Gleichungen (1.), (5.), (6.) folgt $\alpha'=0$, $\beta''=0$, $\alpha\gamma''=1$, und, weil die Determinante der Substitution $=1$ sein soll, $\beta'=1$.

Ferner folgt aus (4.) und (3.)

$$\gamma' \equiv 0 \pmod{\Delta'^2\Omega''}, \quad r' \equiv r \pmod{\Theta};$$

daher $r'=r$, und die Formen wären identisch. Im Folgenden ist daher $\alpha'' \gtrless 0$.

Aus (1.) folgt successive, dass α'' durch $\Theta'\Omega'$, α' durch $\Theta'\Delta'\Omega''$, α'' durch Δ', α' durch Δ'^2 theilbar sein muss. Demnach kann man setzen

$$\alpha' = \Theta'\Delta'^2\Omega''\varepsilon', \quad \alpha'' = \Theta'\Omega'\Delta'\varepsilon'',$$

woraus

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\left(r\varepsilon'' + \frac{\Theta'\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''\varepsilon'^2}{\varepsilon''}\right).$$

Die grössten gemeinschaftlichen Theiler von ε'' mit Θ', Ω', Δ', Ω'', Δ'' seien der Reihe nach Θ'_1, Ω'_1, Δ'_1, Ω''_1, Δ''_1 und

$$\Theta' = \Theta'_1\Theta'_2, \quad \Omega' = \Omega'_1\Omega'_2, \quad \Delta' = \Delta'_1\Delta'_2, \quad \Omega'' = \Omega''_1\Omega''_2, \quad \Delta'' = \Delta''_1\Delta''_2.$$

Endlich sei zur Abkürzung

$$\Theta'_1\Omega'_1\Delta'_1\Omega''_1\Delta''_1 = D_1, \quad \Theta'_2\Omega'_2\Delta'_2\Omega''_2\Delta''_2 = D_2.$$

Setzt man für einen Augenblick $\varepsilon'' = D_1\eta$, so wird

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\left(rD_1\eta + D_2\frac{\varepsilon'^2}{\eta}\right).$$

Da η prim ist zu D_2 und 2α ganz sein soll, muss η in ε'^2 aufgehen. Ausserdem dürfen η und $\frac{\varepsilon'^2}{\eta}$ keinen ungeraden Primfactor gemein haben, da ein solcher auch in α, α', α'' aufginge. Also muss η seine ungeraden

Primfactoren in gerader Potenz enthalten, und man kann setzen

$$\eta = \sigma\varkappa^2, \quad \varepsilon' = \sigma\varkappa\lambda, \quad (\sigma = \pm 1 \text{ oder } \pm 2).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\sigma(rD_1\varkappa^2 + D_2\lambda^2), \quad \alpha' = \sigma\Theta'\Delta''^2\Omega''\varkappa\lambda, \quad \alpha'' = \sigma\Theta D_1\varkappa^2,$$

wo $\varkappa$ prim zu $D_2\sigma'$, λ prim zu $D_1\varkappa$, $r\varkappa + \lambda \equiv \sigma'$ (mod. 2)

sein muss, wenn $\sigma\sigma' = 2$ gesetzt wird.

Substituirt man die gefundenen Werthe in Gl. (6.), so kommt

$$0 = \sigma\Theta'\Omega''^2\Delta''\varkappa\lambda\beta' + \sigma\Theta D_1\varkappa^2\beta + \tfrac{1}{2}\sigma(rD_1\varkappa^2 - D_2\lambda^2)\beta'',$$

woraus folgt, dass β'' durch $\sigma\Theta'\Omega'\Omega_1'\Delta_1''\varkappa$ theilbar sein muss. Setzt man demnach

$$\beta'' = \sigma\Theta'\Omega'\Omega_1'\Delta_1''\varkappa m,$$

so geht die vorige Gleichung über in

$$0 = \Omega_2'\Delta_2''\lambda\beta' + \Theta_1'\Delta'\Delta_1'\Omega_1''\varkappa\beta + \tfrac{1}{2}\sigma(rD_1\varkappa^2 - D_2\lambda^2)m.$$

Aus dieser Gleichung und (2.) erhält man für β und β':

$$\beta' = \sigma\Theta_2'\Delta_2'\Omega_2''\lambda m \pm 1,$$

$$\Theta_1'\Delta'\Delta_1'\Omega_1''\varkappa\beta = \mp\Omega_2'\Delta_2''\lambda - \tfrac{1}{2}\sigma(rD_1\varkappa^2 + D_2\lambda^2)m.$$

Durch Elimination von γ aus (4.) und (5.) findet man

$$\Delta_2'\Omega_2''m = \mp\Theta_1'\Omega''^2\Delta''\varkappa\gamma' \pm \Omega_2'\Delta_2'\Omega_2''\Delta_2''\lambda\gamma'',$$

woraus folgt, dass m durch $\Omega_2'\Delta_2''$ theilbar sein muss. Es sei $m = \Omega_2'\Delta_2''\mu$, also

$$\Theta_1'\Omega'\Omega_1'\Delta_1''\varkappa\gamma' = \Delta_2'\Omega_2''(\lambda\gamma'' \mp \mu).$$

Endlich geben Gl. (5.) und (3.):

$$\alpha''\gamma = 1 + \alpha\gamma'' \pm \sigma D_2\lambda\mu, \quad \gamma'' = \tfrac{1}{2}\sigma(r'D_1\varkappa^2 - D_2\mu^2).$$

Die Determinante der so erhaltenen Substitution ist $= \mp 1$, wesswegen nur die untern Zeichen beizubehalten sind. Die gesuchte ganzzahlige Auflösung des vorgelegten Systems muss also in der Form enthalten sein:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = -\tfrac{1}{2}\sigma(rD_1\varkappa^2 + D_2\lambda^2), & D_1\Delta'\varkappa\beta = \Omega'\Delta''(\lambda + \alpha\mu), & \alpha''\gamma = \alpha\gamma'' - \beta', \\
\alpha' = \sigma\Theta'\Delta''^2\Omega''\varkappa\lambda, & \beta' = \sigma D_2\lambda\mu - 1, & D_1\Omega'\varkappa\gamma' = \Delta'\Omega''(\mu + \lambda\gamma''), \\
\alpha'' = \sigma\Theta D_1\varkappa^2, & \beta'' = \sigma\Theta'\Omega''^2\Delta''\varkappa\mu, & \gamma'' = \tfrac{1}{2}\sigma(r'D_1\varkappa^2 - D_2\mu^2).
\end{array}$$

4. Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen α, β, γ, γ', γ'' ganzzahlig werden. Damit α und γ'' ganz werden und weder α, α', α'' noch α'', β'', γ'' einen gemeinschaftlichen Theiler haben, muss sein

$$\varkappa \text{ prim zu } D_2\sigma', \quad \lambda\mu \text{ prim zu } D_1\varkappa,$$
$$(\alpha.) \qquad r\varkappa+\lambda \equiv r'\varkappa+\mu \equiv \sigma' \pmod{2}.$$

Damit β und γ' ganz werden, muss sein

$$\Omega'\varDelta''(\alpha\mu+\lambda) \equiv 0 \pmod{D_1\varDelta'\varkappa}, \quad \varDelta'\Omega''(\gamma''\lambda+\mu) \equiv 0 \pmod{D_1\Omega'\varkappa}$$

oder

$$(\mathbf{a}.) \qquad \begin{cases} rD_1\varkappa^2\mu+(D_2\lambda\mu-\sigma')\lambda \equiv 0 \pmod{\sigma'\Theta'_1\varDelta_1'^2\varDelta'_2\Omega''_1\varkappa}, \\ r'D_1\varkappa^2\lambda-(D_2\lambda\mu-\sigma')\mu \equiv 0 \pmod{\sigma'\Theta'_1\Omega_1'^2\Omega'_2\varDelta''_1\varkappa}. \end{cases}$$

Der Factor σ' im Modul kann weggelassen werden, weil, für $\sigma' = \pm 2$, $\varkappa$ ungerade ist und die Congruenzen $(\mathbf{a}.)$ (mod. σ') erfüllt sind, wenn es die Congruenzen $(\alpha.)$ sind. Die Moduln der Congruenzen $(\mathbf{a}.)$ sind alsdann die kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen bezw. von $\Theta'_1\Omega''_1\varkappa$, $\varDelta'_2$, $\varDelta_1'^2\varkappa$ und von $\Theta'_1\varDelta''_1\varkappa$, Ω'_2, $\Omega_1'^2\varkappa$. Daher kann man jede durch drei Congruenzen ersetzen, deren Moduln diese Zahlen einzeln sind.

Die Moduln $\Theta'_1\Omega''_1\varkappa$ und $\Theta'_1\varDelta''_1\varkappa$ gehen in $D_1\varkappa$ auf und sind prim zu $\lambda\mu$; also reduciren sich für dieselben die Congruenzen auf

$$(\beta.) \qquad D_2\lambda\mu-\sigma' \equiv 0 \pmod{\Theta'_1\Omega''_1\varDelta''_1\varkappa}.$$

In Bezug auf $\varDelta'_2$ und Ω'_2 erhält man

$$(\gamma.) \qquad rD_1\varkappa^2\mu-\sigma'\lambda \equiv 0 \pmod{\varDelta'_2}, \quad r'D_1\varkappa^2\lambda+\sigma'\mu \equiv 0 \pmod{\Omega'_2}.$$

Zerlegt man ferner $\varDelta'_1$ und Ω'_1 je in zwei Factoren: $\varDelta'_1 = \vartheta\vartheta'$, $\Omega'_1 = \eta\eta'$, von denen ϑ und η in $\varkappa$ aufgehen, ϑ' und η' zu $\varkappa$ prim sind, so lassen sich die Congruenzen $(\mathbf{a}.)$ nach den Moduln $\varDelta_1'^2\varkappa$ und $\Omega_1'^2\varkappa$ durch folgende ersetzen

$$(\delta.) \qquad D_2\lambda\mu-\sigma' \equiv 0 \pmod{\vartheta^2\eta^2\varkappa},$$
$$(\varepsilon.) \quad (rD_1\varkappa^2+D_2\lambda^2)\mu-\sigma'\lambda \equiv 0 \pmod{\vartheta'^2}, \quad (r'D_1\varkappa^2-D_2\mu^2)\lambda+\sigma'\mu \equiv 0 \pmod{\eta'^2}.$$

Schreibt man die Gleichung für γ in der Form

$$\sigma\Theta D_1\varkappa^2\gamma = -\tfrac{1}{4}\sigma^2\{rr'(D_1\varkappa^2)^2+D_1D_2\varkappa^2(r'\lambda^2-r\mu^2)\}+\tfrac{1}{4}(\sigma D_2\lambda\mu-2)^2,$$

so erhält man als Bedingung dafür, dass γ ganz wird:

$$(\mathbf{b}.) \qquad rr'(D_1\varkappa^2)^2+D_1D_2\varkappa^2(r'\lambda^2-r\mu^2) \equiv (D_2\lambda\mu-\sigma')^2 \pmod{2\sigma'\Theta D_1\varkappa^2}.$$

Diese Congruenz untersuche ich zuerst in Bezug auf die höchste im Modul aufgehende Potenz von 2. Ist $\varkappa$ ungerade, so reducirt sie sich auf

$$(r+\lambda)(r'+\mu) \equiv 1 \pmod{2}, \quad \text{wenn} \quad \sigma' = \pm 1,$$

und auf

$$(r\pm\lambda^2)(r'\mp\mu^2) \equiv 0 \pmod{4}, \quad \text{wenn} \quad \sigma' = \pm 2$$

und ist daher eine Folge von (α.). Ist dagegen $\varkappa$ gerade, so reducirt sie sich auf

$$r'-r \equiv \left(\frac{D_2\lambda\mu-\sigma'}{\varkappa}\right)^2 \text{(mod. 2)},$$

oder

$$(\zeta.) \quad D_2\lambda\mu-\sigma' \equiv \varkappa(r'-r) \text{ (mod. } 2\varkappa).$$

Die Congruenz (b.) bleibt jetzt noch nach dem Modul $\Theta D_1\varkappa^2$ zu untersuchen, welcher das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der drei Zahlen $\Theta_2'\Omega_2'\Delta_2'$, $(\Theta_1'\Omega_1'\Delta_1'\varkappa)^2$, $\Omega_1''\Delta_1''\varkappa^2$ ist. Zur Abkürzung setze ich noch

$$\Theta_1'\Omega_1'\Delta_1' = \Theta_1, \quad \Theta_2'\Omega_2'\Delta_2' = \Theta_2,$$

so dass Θ das Product der relativen Primzahlen Θ_1 und Θ_2 ist, welche bezw. in D_1 und D_2 aufgehen.

Nach dem Modul Θ_2 reducirt sich die Congruenz (b.) auf

$$(\text{I.}) \quad rr'(D_1\varkappa^2)^2 \equiv \sigma'^2 \text{ (mod. } \Theta_2),$$

und da aus (β.), (δ.), (ε.) folgt $D_2\lambda\mu-\sigma' \equiv 0$ (mod. $D_1\varkappa$), so reducirt sie sich, mod. $(\Theta_1\varkappa)^2$, auf

$$r'\lambda^2 \equiv r\mu^2 \text{ (mod. } \Theta_1),$$

oder weil $D_2\lambda\mu \equiv \sigma'$ (mod. Θ_1) ist, auf

$$(\text{II.}) \quad r'(D_2\lambda^2)^2 \equiv r\sigma'^2 \text{ (mod. } \Theta_1),$$

während sie nach dem Modul $\Omega_1''\Delta_1''\varkappa^2$ in den früheren enthalten ist.

Die Congruenzen (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.), (ζ.), (I.) und (II.), nebst der Forderung, dass $\varkappa$ prim sei zu $D_2\sigma'$, $\lambda\mu$ prim zu $D_1\varkappa$, geben die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Substitutionscoefficienten ganzzahlig werden. Man überzeugt sich aber leicht, dass nur die Congruenzen (I.) und (II.) wesentlich sind; denn ist es möglich diesen zu genügen, so können auch alle übrigen Bedingungen erfüllt werden. In der That, sind die Congruenzen (I.) und (II.) überhaupt auflösbar, so sind sie es auch so, dass $\varkappa$ prim wird zu $D_2\sigma'$, λ prim zu $D_1\varkappa$ und $r\varkappa+\lambda \equiv \sigma'$ (mod. 2). Dann lässt sich μ den Congruenzen (α.), (β.), (δ.), (ζ.), hierauf λ und μ den Congruenzen (γ.) und endlich μ den Congruenzen (ε.) gemäss bestimmen. Die zweite der Congruenzen (ε.) ist zwar quadratisch in μ; schreibt man sie aber in der Form

$$(\sigma D_2\lambda\mu-1)^2 \equiv 1+\sigma^2 r' D_1 D_2 \varkappa^2\lambda^2 \text{ (mod. } \eta'^2),$$

so erkennt man sofort ihre Auflösbarkeit, weil η' in D_1 aufgeht und zu $\sigma D_2\lambda$ prim ist.

Da die Formen $f(r)$ und $f(r')$ in dasselbe Geschlecht gehören, so ist die Congruenz

$$(A.) \qquad rz^2 \equiv r' \pmod{\Theta}$$

lösbar und hat 2^ν Wurzeln. Führt man diesen Werth von r' in die Congruenzen (I.) und (II.) ein, so gehen sie über in

$$rzD_1\varkappa^2 \equiv \sigma' \pmod{\Theta_2}, \quad zD_2\lambda^2 \equiv \sigma' \pmod{\Theta_1},$$

wo z jede beliebige Wurzel von $(A.)$ bedeutet. Setzt man noch $D_1 = \Theta_1\mathrm{D}_1$, $D_2 = \Theta_2\mathrm{D}_2$, so wird $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 = \Omega''\Delta''$, und man erhält folgende ***nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz der Formen $f(r)$ und $f(r')$:***

Es muss eine Zerlegung von Θ in $\Theta_1\Theta_2$ und von $\Omega''\Delta''$ in $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2$, einen Werth $\sigma' = \pm 1, \ \pm 2$ und eine Wurzel der Congruenz $(A.)$ geben, so dass $\sigma\Theta_2\mathrm{D}_2 z$ quadratischer Rest von Θ_1 und $\sigma'\Theta_1\mathrm{D}_1 rz$ quadratischer Rest von Θ_2 wird. Oder was dasselbe ist:

Es muss eine binäre Form $(a, 0, rc)$ der Determinante $-r\Theta\Omega''\Delta''$ geben, deren Charaktere in Bezug auf alle Primfactoren von Θ übereinstimmen mit den Charakteren eines der Werthe von z oder $2z$.

Das Doppelzeichen von σ' braucht nicht berücksichtigt zu werden und die Untersuchung braucht sich nur auf positive Formen $(a, 0, rc)$ und auf die Primfactoren der Form $4n+1$ von Θ zu erstrecken. Denn bekanntlich wird die Congruenz $(A.)$ aufgelöst, indem man sie zunächst nach den einzelnen Primfactoren von Θ als Moduln auflöst und dann z den gefundenen Wurzeln nach den betreffenden Moduln congruent macht. Ist nun der Modul von der Form $4n+3$, so ist von den Wurzeln die eine quadratischer Rest, die andre quadratischer Nichtrest des Moduls.

5. Die in einem bestimmten Nullgeschlecht enthaltenen $2^{-\nu}\varphi(\Theta)$ reducirten Formen $f(r)$ lassen sich nun folgendermassen in Klassen ordnen:

Man entwickle das System aller positiven Formen $(a, 0, rc)$ der Determinante $-r\Theta\Omega''\Delta''$ und stelle das System Σ_1 ihrer Gesammtcharaktere (d. h. für jede Form die Reihe ihrer Charaktere) in Bezug auf die Primfactoren θ von Θ auf. Da dieses System Σ_1 sich durch Zusammensetzung mit jedem beliebigen seiner Gesammtcharaktere reproducirt, so muss die Anzahl der verschiedenen Gesammtcharaktere desselben ein Theiler der Anzahl aller angebbaren, d. h. von 2^ν, also selbst eine Potenz von 2 sein.

Sodann multiplicire man die einzelnen Charaktere von Σ_1 mit dem Charakter der Zahl 2 in Bezug auf den betreffenden Primfactor θ, so erhält

man ein System Σ_2, welches mit dem System Σ_1 entweder alle oder keinen Gesammtcharakter gemein hat. Die verschiedenen Gesammtcharaktere von Σ_1 und Σ_2 zusammen mögen das System Σ bilden. Ihre Anzahl ist wieder eine Potenz von 2; sie sei $= 2^{\mu} (\mu \leqq \nu)$.

Nun giebt es $2^{-\nu}\varphi(\Theta)$ positive ganze Zahlen, welche nicht grösser als Θ, zu Θ prim sind und vorgeschriebene Charaktere in Bezug auf die Primfactoren von Θ haben, und $2^{\mu-\nu}\varphi(\Theta)$ Zahlen z, welche incongruent (mod. Θ) und prim zu Θ sind und irgend einen der obigen 2^{μ} Charaktere des Systems Σ haben. Quadrirt man diese z, so liefern sie $2^{\mu'-\nu-\nu'}\varphi(\Theta)$ incongruente Werthe (mod. Θ), *wo ν' die Anzahl der Primfactoren θ von der Form $4n+1$ bezeichnet und $2^{\mu'}$ die Anzahl der in Bezug auf diese Primzahlen verschiedenen Gesammtcharaktere in Σ.* Diese $2^{\mu'-\nu-\nu'}\varphi(\Theta)$ incongruenten Werthe der z^2 oder ihre Reste (mod. Θ) mögen durch

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots \quad Z_\varrho$$

bezeichnet werden. Unter ihnen befindet sich immer die Zahl 1.

Man nehme nun irgend eine reducirte Form $f(r)$ aus dem betrachteten Nullgeschlecht, bestimme die kleinsten positiven Reste (mod. Θ) der Producte

$$rZ_1, \quad rZ_2, \quad \ldots \quad rZ_\varrho.$$

Dieselben seien

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots \quad r_\varrho.$$

Dann sind

$$f(r_1), \quad f(r_2), \quad \ldots \quad f(r_\varrho)$$

ϱ reducirte äquivalente Formen des Nullgeschlechts, und andere ihnen äquivalente reducirte Formen giebt es nicht. Sie erschöpfen alle reducirten Formen des Nullgeschlechts, und dasselbe enthält nur *eine* Klasse, wenn $\varrho = 2^{-\nu}\varphi(\Theta)$, also $\mu' = \nu'$. Ist $\mu' < \nu'$, so giebt es noch andere reducirte Formen jenes Geschlechts; $f(r')$ sei eine solche. Bildet man wieder die kleinsten positiven Reste (mod. Θ)

$$r'_1, \quad r'_2 \quad \ldots \quad r'_\varrho$$

der Producte

$$r'Z_1, \quad r'Z_2, \quad \ldots \quad r'Z_\varrho,$$

so erhält man ϱ neue unter sich äquivalente reducirte Formen

$$f(r'_1), \quad f(r'_2), \quad \ldots \quad f(r'_\varrho),$$

welche eine zweite Klasse bilden, u. s. w. *Im Ganzen wird man $2^{\nu'-\mu'}$ Klassen mit je ϱ reducirten Formen finden,* woraus man wieder sieht, dass man bei

der Bestimmung der Klassenanzahl die Primfactoren der Form $4n+3$ von Θ gar nicht zu berücksichtigen braucht. Enthält Θ bloss Primfactoren der Form $4n+3$, so enthält jedes Nullgeschlecht der Invarianten Ω, Δ nur *eine* Klasse.

Beispiel. Sind die ν Primfactoren von Θ alle von der Form $8n+1$ und jeder quadratischer Rest aller übrigen, sind ferner alle Primfactoren von $\Omega''\Delta''$ quadratische Reste von Θ, so fallen die Systeme Σ_1 und Σ_2 zusammen, und μ' bedeutet die Anzahl derjenigen Primfactoren von Θ, von welchen r quadratischer Nichtrest ist. Speciell enthält dann dasjenige Nullgeschlecht, für welches $\left(\frac{f}{\theta}\right)=\left(\frac{F}{\theta}\right)=1$ ist in Bezug auf jeden Primfactor θ von Θ, 2^ν Klassen.

Zweiter Theil.

Nachdem im ersten Theil die Frage nach der Aequivalenz der betrachteten ternären Nullformen erledigt worden ist, ergiebt sich nun für diese Formen auch die Lösung der Aufgabe, Zahlen und binäre quadratische Formen durch dieselben darzustellen. Im Folgenden soll, jedoch wieder unter vereinfachenden Voraussetzungen, noch die Darstellung binärer Formen durch ternäre Nullformen behandelt werden, weil sich dabei ein bemerkenswerther Zusammenhang mit der Theorie der Composition ergiebt. Ich betrachte also die Aufgabe:

6. *Durch eine ternäre Nullform der Invarianten Ω, Δ eine binäre Form $\varphi=(p, q'', p')$ der Determinante ΩM darzustellen.*

Indem ich die Bezeichnungen und Beschränkungen des ersten Theils beibehalte, setze ich ferner voraus, φ sei eigentlich primitiv und M prim zu $\Omega\Delta$, und beschränke mich auf eigentliche Darstellungen.

Damit φ durch ternäre Formen der Invarianten Ω, Δ eigentlich darstellbar sei, müssen folgende Congruenzen lösbar sein *):

$$(1.)\qquad Q^2\equiv\Delta p,\quad QQ'\equiv-\Delta q'',\quad Q'^2\equiv\Delta p' \pmod{M},$$

und sodann bestimmen sich die übrigen Coefficienten der ternären Form

$$f=\begin{pmatrix}p, & p', & p''\\ q, & q', & q''\end{pmatrix},$$

durch welche φ dargestellt wird, und ihrer primitiven Adjungirten

$$F=\begin{pmatrix}P, & P', & P''\\ Q, & Q', & Q''\end{pmatrix}$$

*) *Gauss,* Disq. ar. Art. 283. *Smith,* On the orders etc. Art. 10.

durch die Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{Q'^2-\Delta p'}{M}, \quad P' = \dfrac{Q^2-\Delta p}{M}, \quad P'' = M, \quad Q'' = \dfrac{QQ'+\Delta q''}{M}, \\ p'' = \dfrac{Q^2p'+2QQ'q''+Q'^2p+M\Omega\Delta}{M^2}, \quad q = -\dfrac{Qp'+Q'q''}{M}, \quad q' = -\dfrac{Qq''+Q'p}{M}. \end{cases}$$

Damit die Congruenzen (1.) lösbar seien, muss für jeden ungeraden Primfactor μ von M sein:

$$(\alpha.)\quad \left(\frac{\varphi}{\mu}\right) = \left(\frac{\Delta}{\mu}\right);$$

ausserdem

$$\varphi \equiv \Delta \text{ (mod. 4 oder 8), je nachdem } M \equiv 4 \text{ oder } 0 \text{ (mod. 8).}$$

In der letzten Congruenz bedeutet φ zur Abkürzung irgend eine durch φ darstellbare ungerade Zahl. Dass diese Bedingungen auch hinreichen, ist leicht zu sehen.

Sind Q und Q' den Congruenzen (1.) gemäss bestimmt, so werden P, P', Q'' ganzzahlig; ebenso q und q', weil ausser den obigen Gleichungen für q und q' noch die folgenden gelten

$$q = \frac{PQ-Q'Q''}{\Delta}, \quad q' = \frac{P'Q'-QQ''}{\Delta}$$

und der Voraussetzung nach M und Δ relativ prim sind. Aus analogem Grunde wird auch

$$p'' = \frac{q'^2-P'\Omega}{p} = \frac{q^2-P\Omega}{p'} = \frac{qq'+Q''\Omega}{q''}$$

ganzzahlig. Endlich überzeugt man sich leicht, dass die Formen f und F beide eigentlich primitiv sind und die Invarianten Ω, Δ besitzen.

Da φ primitiv ist, können $p, p', M\Omega$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben und es ist sonach, wenn wie früher θ', ω, δ die verschiedenen Primfactoren von $\Theta', \Delta'\Omega'', \Omega'\Delta''$ resp., ausserdem ω', δ' diejenigen von Ω', Δ' bezeichnen:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \left(\frac{f}{\theta'}\right)=\left(\frac{\varphi}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{f}{\omega}\right)=\left(\frac{\varphi}{\omega}\right), \quad \left(\frac{f}{\omega'}\right)=\left(\frac{\varphi}{\omega'}\right); \\ \left(\frac{F}{\theta'}\right)=\left(\frac{M}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{F}{\delta}\right)=\left(\frac{M}{\delta}\right), \quad \left(\frac{F}{\delta'}\right)=\left(\frac{M}{\delta'}\right). \end{cases}$$

Die Forderung, dass f eine Nullform sei, giebt weiter für φ die Bedingungen:

$$(\alpha'.)\quad \left(\frac{M}{\delta}\right)=\left(\frac{\Theta'\Delta'\Omega''}{\delta}\right), \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)=\left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{\omega}\right), \left(\frac{\varphi}{\theta'}\right)=\left(\frac{-M\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''}{\theta'}\right).$$

Die Gleichungen (α.) und (α'.) geben also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die eigentlich primitive binäre Form φ der Determinante $M\Omega$ durch ternäre Nullformen der Invarianten Ω, Δ darstellbar sei. Zusammen mit den Gleichungen (β.) zeigen sie, dass das Geschlecht der binären Form durch dasjenige der ternären vollständig bestimmt ist, und umgekehrt.

Soll nun φ durch eine gegebene ternäre Nullform dargestellt werden, so hat man zunächst zu untersuchen, ob die Bedingungen (α.), (β.), (α'.) erfüllt seien, sodann alle Formen $\begin{pmatrix} p, & p', & p'' \\ q, & q', & q'' \end{pmatrix}$ aufzustellen, welche nichtäquivalenten Congruenzwurzeln Q, Q' entsprechen (wobei man von zwei entgegengesetzten Werthsystemen Q, Q' und $-Q$, $-Q'$ nur eines zu nehmen braucht), von diesen Formen diejenigen zu suchen, welche der gegebenen Nullform äquivalent sind, und die Transformationen der letzteren in die ersteren zu ermitteln, um alle gesuchten Darstellungen von φ zu erhalten. Alles dieses kann nach den Entwickelungen des ersten Theils ausgeführt werden. (Der hierbei zu berücksichtigende Fall $r' = r$, $\alpha'' = 0$ in Art. 3 erledigt sich leicht.)

7. Die Frage nach der *Möglichkeit* der Darstellung einer binären Form durch eine ternäre will ich für den Fall noch genauer betrachten, dass M keinen quadratischen Factor enthält. Hierbei handelt es sich nur darum zu entscheiden, welche binäre *Klassen* durch eine gegebene ternäre und umgekehrt, durch welche ternäre Klassen eine gegebene binäre darstellbar seien. Sobald nun die Invarianten Ω, Δ der ternären Klassen gegeben sind, so muss zunächst die Determinante $M\Omega$ der binären Formen der Bedingung $\left(\frac{M\Theta'\Delta'\Omega''}{\delta}\right) = 1$ genügen für jeden Primfactor δ von $\Omega'\Delta''$. Ist M dieser Bedingung gemäss gegeben, so bleiben nur noch die Charaktere $\left(\frac{\varphi}{\omega'}\right) = \left(\frac{f}{\omega'}\right)$ der binären und ternären Klassen willkürlich. Die übrigen sind durch die Gleichungen (α.), (β.), (α'.) bestimmt.

Statt der Form φ kann man irgend eine ihr äquivalente nehmen, und zwar kann man $\varphi = (p, q'', p')$ immer so wählen, dass

$$(3.) \qquad p = -M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2$$

wird, wo $\mathfrak{p}$ prim ist zu $2M\Omega\Delta$.

Beweis. Die Congruenz

$$z^2 \equiv M\Theta'\Delta'\Omega'' \pmod{\Omega'\Delta''}$$

ist der Voraussetzung nach lösbar und, da $M\Theta'\Delta'\Omega''$ prim ist zu $\Omega'\Delta''$, so,

dass der Ausdruck $M\Delta'\Omega''\frac{M\Theta'\Delta'\Omega''-z^2}{\Omega'\Delta''}$ zu Ω' prim wird und in Bezug auf die Primfactoren ω' von Ω' dieselben quadratischen Charaktere erhält wie die Form φ. Setzt man z als so bestimmt voraus, so ist

$$\left(\Omega'^3\Delta'',\ \Omega'z,\ \frac{z^2-M\Theta'\Delta'\Omega''}{\Omega'\Delta''}\right)$$

eine eigentlich primitive Form der Determinante $M\Omega$; dasselbe gilt von der Form $(-M\Delta'\Omega'', 0, \Theta'\Omega'^2)$. Durch Zusammensetzung beider Formen entsteht wieder eine eigentlich primitive Form derselben Determinante

$$\psi = \left(-M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta'',\ M\Omega'\Delta'\Omega''z_1,\ \frac{\Theta'-M\Delta'\Omega''z_1^2}{\Omega'\Delta''}\right),$$

welche mit φ in dasselbe Geschlecht gehört; denn es ist

nach (α.): $\left(\frac{\varphi}{\mu}\right)=\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)=\left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{\mu}\right)=\left(\frac{\psi}{\mu}\right)$,

nach (α'.): $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)=\left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{\omega}\right)=\left(\frac{\psi}{\omega}\right)$; $\left(\frac{\varphi}{\theta'}\right)=\left(\frac{-M\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''}{\theta'}\right)=\left(\frac{\psi}{\theta'}\right)$,

endlich nach Construction:

$$\left(\frac{\varphi}{\omega'}\right) = \left(\frac{\psi}{\omega'}\right),$$

und der, wenn $M\Omega \equiv 3$ (mod. 4) oder ± 2 (mod. 8), noch übrig bleibende Charakter muss also für beide Formen auch noch gleich sein. Folglich gehört die Form $\psi^{-1}\varphi$, welche durch Zusammensetzung von φ mit der entgegengesetzten von ψ entsteht, ins Hauptgeschlecht und kann durch Duplication einer eigentlich primitiven Form χ der Determinante $M\Omega$ erhalten werden, so dass $\psi^{-1}\varphi=\chi^2$ oder

$$(4.)\qquad \varphi = \psi\chi^2.$$

Nun kann χ eine Zahl $\mathfrak{p}$ eigentlich darstellen, welche zu jeder beliebig gegebenen Zahl, hier zu $2M\Omega\Delta$, prim ist, und dann stellt φ die Zahl $-M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2$ eigentlich dar und kann daher so transformirt werden, dass der erste Coefficient dieser Zahl gleich wird; w. z. b. w.

Setzt man also von vornherein $\varphi=(-M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2, q'', p')$, so wird

$$(5.)\qquad q''^2+M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2p' = M\Theta'\Omega'^2\Delta'\Omega'';$$

also, weil $M\Omega'\Delta'\Omega''$ keinen quadratischen Theiler hat:

$$q''\equiv 0 \text{ (mod. } M\Omega'\Delta'\Omega''); \quad \Omega'\Delta''\mathfrak{p}^2p'\equiv\Theta' \text{ (mod. } M\Delta'\Omega'').$$

Nach dieser Vorbereitung lauten die Congruenzen für Q und Q':

$$Q^2\equiv 0,\quad QQ'\equiv 0,\quad Q'^2\equiv \Delta p' \text{ (mod. } M);$$

folglich kann $Q = 0$ gesetzt werden. Ausserdem wird

$$Q'^2\mathfrak{p}^2 \equiv \Delta\mathfrak{p}^2 p' \equiv \Theta'^2\Delta'^2 \pmod{M}$$

oder

$$(Q'\mathfrak{p} - \Theta'\Delta')(Q'\mathfrak{p} + \Theta'\Delta') \equiv 0 \pmod{M},$$

$$f = \begin{pmatrix} -M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2, & p', & \Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\dfrac{\Theta'^2\Delta'^2 - Q'^2\mathfrak{p}^2}{M} \\ -\dfrac{Q'q''}{M}, & Q'\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2, & q'' \end{pmatrix}.$$

Die Form f ist jetzt zu reduciren. Zu diesem Zweck ist zunächst die Null eigentlich durch dieselbe darzustellen, d. h. eine Auflösung der Gleichung zu suchen

$$0 = -M\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2 x^2 + p'x'^2 + \Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\frac{\Theta'^2\Delta'^2 - Q'^2\mathfrak{p}^2}{M}x''^2$$
$$-2\frac{Q'q''}{M}x'x'' + 2Q'\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''\mathfrak{p}^2 x''x + 2q''xx'$$

in ganzen Zahlen x, x', x'' ohne gemeinschaftlichen Theiler. Da es genügt, eine specielle Lösung zu haben, setze ich $x' = 0$, wodurch sich die Gleichung auf

$$M\mathfrak{p}x = (\pm\Theta'\Delta' + Q'\mathfrak{p})x''$$

reducirt. Der grösste gemeinschaftliche Theiler von $M\mathfrak{p}$ und $\Theta'\Delta' + Q'\mathfrak{p}$ ist ein Theiler von M und zwar $\equiv M \pmod{2}$. Er sei $= M_1$ und $M = M_1 M_2$. Dann kann man setzen

$$x = \frac{\Theta'\Delta' + Q'\mathfrak{p}}{M_1}, \quad x' = 0, \quad x'' = M_2\mathfrak{p}.$$

Werden ferner γ und γ'' der Gleichung gemäss bestimmt

$$(\Theta'\Delta' + Q'\mathfrak{p})\gamma'' - M\mathfrak{p}\gamma = M_1,$$

so geht f durch die Substitution

$$x = \frac{\Theta'\Delta' + Q'\mathfrak{p}}{M_1}y + \gamma y'', \quad x' = y', \quad x'' = M_2\mathfrak{p}y + \gamma'' y''$$

der Determinante 1 über in die Form

$$\begin{pmatrix} 0, & p', & \dfrac{\Omega'^3\Delta'\Omega''\Delta''(2\Theta'\Delta'\gamma'' - M_1)}{M_2} \\ \dfrac{q''(\Theta'\Delta'\gamma'' - M_1)}{M\mathfrak{p}}, & \Theta'\Omega'^3\Delta'^2\Omega''\Delta''\mathfrak{p}, & \dfrac{q''\Theta'\Delta'}{M_1} \end{pmatrix},$$

deren erster Coefficient 0 ist. Um auch den letzten $= 0$ zu machen, wende ich die Substitution an

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \mu', & \nu' \\ 0, & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}, \quad \mu'\nu'' - \mu''\nu' = 1,$$

wodurch der sechste Coefficient $= \Theta' \varDelta' \left(\Omega'^3 \varDelta' \Omega'' \varDelta'' \mathfrak{p} \mu'' + \frac{q''}{M_1} \mu' \right)$, also Null wird, wenn man setzt

$$\mu' = \Omega'^2 \varDelta'' \mathfrak{p}, \quad \mu'' = -\frac{q''}{M_1 \Omega' \varDelta' \Omega''},$$

welche Zahlen, wie aus Gl. (5.) zu ersehen, relativ prim sind. Demnach lassen sich auch ν' und ν'' der Gleichung gemäss bestimmen

$$\Omega'^2 \varDelta'' \mathfrak{p} \nu'' + \frac{q''}{M_1 \Omega' \varDelta' \Omega''} \nu' = 1.$$

Hierdurch geht die Form über in $\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & b', & 0 \end{pmatrix}$, wo

$$a' = \Theta' \Omega'^3 \varDelta'', \quad a'' = p' \nu'^2 + 2 \frac{q''(\Theta' \varDelta' \gamma'' - M_1)}{M \mathfrak{p}} \nu' \nu'' + \frac{\Omega'^3 \varDelta' \Omega'' \varDelta'' (2\Theta' \varDelta' \gamma'' - M_1)}{M_2} \nu''^2,$$

$$b = \frac{\Theta'}{\mathfrak{p}} \left(\Omega' \nu' - \frac{\varDelta' q'' \gamma''}{M} \right), \quad b' = \Theta' \Omega' \varDelta''^2 \Omega''.$$

Hier ist ν'' durch ν' bestimmt, ν' und γ'' aber nur insoweit, als sie ($q'' = M \Omega' \varDelta' \Omega'' \mathfrak{q}$ gesetzt) den Congruenzen zu genügen haben:

$$(\Theta' \varDelta' + Q' \mathfrak{p}) \gamma'' \equiv M_1 \pmod{M \mathfrak{p}}, \quad M_2 \mathfrak{q} \nu' \equiv 1 \pmod{\Omega'^2 \varDelta'' \mathfrak{p}}.$$

Mit diesen Congruenzen ist aber die Annahme $\nu' = \frac{\varDelta' q'' \gamma''}{M \Omega'} = \varDelta'^2 \Omega'' \mathfrak{q} \gamma''$ verträglich, wie sich aus der Gleichung $\mathfrak{q}^2 M \varDelta' \Omega'' + \Omega' \varDelta'' \mathfrak{p}^2 p' = \Theta'$ ergiebt. Durch diese Annahme wird $b = 0$, a'' durch $\varDelta' \Omega''$ theilbar; es sei $a'' = a_1'' \varDelta' \Omega''$. Die weitern Reductionen (Art. 2) ändern a_1'', mod. Θ, nicht mehr, so dass man zur Bestimmung der reducirten Form $f(r)$ hat:

$$r \varDelta' \Omega'' \equiv a'' \pmod{\Theta \varDelta' \Omega''}; \quad 0 < r \leqq \Theta.$$

Nun ist aber

$$M \mathfrak{p} a'' \equiv M \mathfrak{p} p' \nu'^2 - 2 q'' M_1 \nu' \nu'' - \Omega'^3 \varDelta' \Omega'' \varDelta'' M_1^2 \mathfrak{p} \nu''^2 \pmod{\Theta'}$$

oder

$$(6.) \quad \Omega' \varDelta'' M \mathfrak{p}^2 r \equiv -(M \mathfrak{q} \nu' + \Omega'^2 \varDelta'' M_1 \mathfrak{p} \nu'')^2 \equiv -M_1^2 \pmod{\Theta'}$$

oder auch

$$(6^a.) \quad p r \equiv M_1^2 \Omega'^2 \varDelta' \Omega'' \pmod{\Theta'}.$$

Ferner ist

$$M_2 a'' \equiv -M_1 \Omega'^3 \varDelta' \Omega'' \varDelta'' \nu''^2 \pmod{\varDelta'^2} \quad \text{oder} \quad M_2 r \equiv -M_1 \Omega'^3 \varDelta'' \nu''^2 \pmod{\varDelta'}$$

oder

$$(7.) \quad \Omega' \varDelta'' M \mathfrak{p}^2 r \equiv -M_1^2 \pmod{\varDelta'}$$

oder auch

$$(7^a.) \quad M_2 \Theta' r \equiv -M_1 p' \pmod{\varDelta'}.$$

Endlich ist

$$a'' \equiv p'\nu'^2 \pmod{\Omega'}$$

oder

$$(8.) \quad M_2\Theta' r \equiv M_1 p' \pmod{\Omega'}.$$

Die Congruenzen (6^a.), (7^a.), (8.) bestimmen r, mod. Θ, und lassen erkennen, in welche Klasse die erhaltene ternäre Form gehört.

Lässt man, wenn φ gegeben ist, M_2 alle ungeraden (positiven) Theiler von M durchlaufen, so erhält man eine Reihe von ternären Nullformen $f(r)$, die man nach dem im Art. 5 angegebenen Verfahren in Klassen ordnen kann. Man wird nur *eine* Klasse erhalten, wenn die Gesammtcharaktere der Divisoren M_2 in Bezug auf die Primfactoren θ sämmtlich im System Σ (Art. 5) enthalten sind. Im Allgemeinen aber bestimmt sich die Anzahl dieser Klassen dadurch, dass man die Gesammtcharaktere aller Divisoren M_2 mit denjenigen in Σ multiplicirt und die Anzahl der verschiedenen so erhaltenen Gesammtcharaktere durch die Anzahl der verschiedenen in Σ enthaltenen dividirt, wobei man sich wieder auf die Primfactoren θ der Form $4n+1$ beschränken kann.

8. Ist $\Omega' = 1$, so lässt sich das System der durch eine gegebene ternäre Nullform der Invarianten Ω, Δ darstellbaren binären Formen φ von gegebener Determinante $M\Omega$ folgendermassen leicht herstellen.

Die ternäre Form wird zunächst in die Gestalt gebracht

$$\begin{pmatrix} 0, & \Theta'\Delta'', & r\Delta'\Omega'' \\ 0, & \Theta'\Delta'^2\Omega'', & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist indessen r nur mod. Θ bestimmt und darf ausserdem durch rz^2 ersetzt werden (Art. 5), wo z alle Zahlen eines vollständigen Restsystems, mod. Θ, durchläuft, die zu Θ prim sind und deren quadratische Charaktere in Bezug auf die Primfactoren von Θ dem System Σ angehören. Ferner kann M_2 in den Congruenzen (6.) und (7.) des vorigen Artikels alle ungeraden (positiven) Theiler von $M = M_1M_2$ durchlaufen. Die Zahl $\mathfrak{p}$ ist daher durch (6.) und (7.) nur mod. Θ und nur soweit bestimmt, als sie zu $2M\Omega\Delta$ prim vorausgesetzt ist und als ihr Gesammtcharakter in Bezug auf die Primfactoren von Θ stimmen muss mit einem der Gesammtcharaktere, die man erhält, wenn man denjenigen eines der Werthe von $\sqrt{\frac{-M_1}{\Delta'' M_2 r}}$ (mod. Θ), oder einfacher, von $\sqrt{-M\Delta'' r}$ (mod. Θ) der Reihe nach multiplicirt sowohl mit je einem des Systems Σ als mit je einem des Systems der Divisoren M_2. Ebenso ist die Form χ der Determinante $M\Omega$ nur insoweit bestimmt, als sie eigent-

lich primitiv sein und einem Geschlecht angehören muss, dessen Gesammtcharakter in Bezug auf die Primfactoren θ mit einem der soeben für $\mathfrak{p}$ aufgestellten stimmt. Wählt man noch für ψ irgend eine der Formen

$$\left(-M\varDelta'\Omega''\varDelta'',\ M\varDelta'\Omega''\mathfrak{z}_1,\ \frac{\Theta'-M\varDelta'\Omega''\mathfrak{z}_1^2}{\varDelta''}\right)$$

der Determinante $M\Omega$, so giebt die Gleichung $\varphi=\psi\chi^2$ alle gesuchten Klassen von Formen φ.

Beispiel. Es sei

$$\Theta = 2993 = 41.73,\quad \Omega'\varDelta'\Omega''\varDelta'' = 1,\quad M=-3.$$

Die Bedingungen (α.), (β.), (α'.) lauten:

$$\left(\frac{\varphi}{3}\right)=\left(\frac{41.73}{3}\right)=-1,\ \left(\frac{\varphi}{41}\right)=\left(\frac{f}{41}\right)=\left(\frac{3}{41}\right)=-1,\ \left(\frac{\varphi}{73}\right)=\left(\frac{f}{73}\right)=\left(\frac{3}{73}\right)=+1;$$

$$\left(\frac{F}{41}\right)=-1,\quad \left(\frac{F}{73}\right)=+1.$$

Eigentlich primitive binäre Formen φ der Determinante $-3.41.73$ lassen sich also durch ternäre Nullformen der Invarianten 2993, 2993 nur darstellen, wenn erstere dem Geschlecht $N3$, $N41$, $R73$; letztere dem Nullgeschlecht $fN41$, $R73$; $FN41$, $R73$ angehören. Das System Σ, welches sich auf das ternäre Geschlecht bezieht, enthält zwei Gesammtcharaktere $R41$, $R73$ und $N41$, $N73$, und daher besteht das Geschlecht aus zwei Klassen, welche durch die Formen

$$f(3)=\begin{pmatrix}0, & 2993, & 3\\ 0, & 2993, & 0\end{pmatrix};\qquad f(55)=\begin{pmatrix}0, & 2993, & 55\\ 0, & 2993, & 0\end{pmatrix}$$

repräsentirt werden können.

Die eigentlich primitiven binären Formen der Determinante

$$-3.41.73 = -8979$$

zerfallen in vier Geschlechter. Bezeichnet man die Formen (5, 1, 1796) und (3, 0, 2993) bezw. mit α und β, so lassen sich die Klassen, aus welchen diese Geschlechter bestehen, durch folgende Formen repräsentiren:

I. Geschlecht: $R3$, $R41$, $R73:\alpha^{2k}$; III. Geschlecht: $N3$, $R41$, $N73:\alpha^{2k+1}$,
II. „ $N3$, $N41$, $R73:\alpha^{2k}\beta$; IV. „ $R3$, $N41$, $N73:\alpha^{2k+1}\beta$.
($k=0, 1, 2, \ldots 17$).

Um die Formen φ zu finden, welche durch $f(3)$ dargestellt werden können, ist der Gesammtcharakter von $\sqrt{3.3}$ (mod. Θ); d. h. $N41$, $R73$ zu multipliciren sowohl mit je einem des Systems Σ als mit je einem der Theiler von 3. Dies giebt die beiden Gesammtcharaktere

$R41$, $R73$ und $N41$, $R73$,

welche den Formen χ zukommen müssen. Es ist also

$$\chi = \alpha^{2k} \text{ oder } \alpha^{2k}\beta, \quad \chi^2 = \alpha^{4k}, \quad \psi = \beta$$

und

$$\varphi = \alpha^{4k}\beta \qquad (k = 0, 1, 2, \dots 8).$$

Um dagegen die Formen φ zu erhalten, welche durch $f(55)$ darstellbar sind, hat man den Gesammtcharakter von $\sqrt{3.55}$ (mod. Θ), d. h. $R41$, $N73$ zu multipliciren das eine Mal mit $R41$, $R73$, das andere Mal mit $N41$, $R73$, wodurch man die Gesammtcharaktere

$$R41,\ N73 \quad \text{oder} \quad N41,\ N73$$

bekommt, so dass

$$\chi = \alpha^{2k+1} \quad \text{oder} \quad \alpha^{2k+1}\beta, \quad \chi^2 = \alpha^{4k+2}$$

ist und

$$\varphi = \alpha^{4k+2}\beta \qquad (k = 0, 1, 2, \dots 8).$$

Dritter Theil.

Es soll nun die Anzahl der Klassen eines jeden ternären Nullgeschlechts für ungerade positive Invarianten Ω, Δ ermittelt werden. Dabei bediene ich mich einer von *Eisenstein* angegebenen Methode *), um aus den Klassenanzahlen der Nullgeschlechter der Invarianten Ω, Δ die Klassenanzahlen der zu den Invarianten Ω, Δp^2 gehörenden Nullgeschlechter zu berechnen, wo p hier *wie überall im Folgenden* eine ungerade Primzahl bedeutet. Durch successive Wiederholung dieses Verfahrens wird es dann möglich sein, von den Resultaten des ersten Theils ausgehend die Klassenanzahl jedes Nullgeschlechtes für beliebige positive ungerade Invarianten zu erhalten.

9. Zunächst gilt der Satz:

Jede primitive Nullform der Invarianten Ω, Δp^2 kann aus einer primitiven Nullform der Invarianten Ω, Δ durch eine Substitution der Determinante p abgeleitet werden.

Derselbe ist bewiesen, sobald es der folgende speciellere ist:

Jede primitive Form $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$ der Invarianten Ω, Δp^2 kann durch eine der Substitutionen

$$(A.) \quad x = py, \quad x' = py', \quad x'' = y'';$$
$$(B.) \quad x = py, \quad x' = y', \quad x'' = \mu y' + py''$$

*) Monatsbericht der Berl. Akad. vom Juni 1852.

in eine Nullform $\binom{a_1,\ a'_1,\ a''_1}{b_1,\ b'_1,\ b''_1}$ transformirt werden, deren Coefficienten den grössten gemeinschaftlichen Theiler p^2 haben, die Coefficienten der Adjungirten dagegen den grössten gemeinschaftlichen Theiler Ωp^4.

Denn die Form $\frac{1}{p^2}\binom{a_1,\ a'_1,\ a''_1}{b_1,\ b'_1,\ b''_1}$ ist alsdann primitiv, hat die Invarianten Ω, Δ und geht durch die Substitution

$$y = x,\quad y' = x',\quad y'' = px'' \quad \text{oder} \quad y = x,\quad y' = px',\quad y'' = -\mu x' + x''$$

wieder in $\binom{a,\ a',\ 0}{0,\ b',\ b''}$ über.

Im Folgenden soll zur Abkürzung der Exponent der höchsten in einer Zahl m aufgehenden Potenz einer Primzahl p mit $|m|_p$ oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, einfach mit $|m|$ und $mp^{-|m|}$ mit m_0 bezeichnet werden.

Der Beweis des obigen specielleren Satzes ergiebt sich nun so:

Durch die Substitutionen (*A.*) und (*B.*) erhält man für $\frac{1}{p^2}\binom{a_1,\ a'_1,\ a''_1}{b_1,\ b'_1,\ b''_1}$ bezw. die Ausdrücke

$$\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & \frac{b'}{p}, & b'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a, & \frac{a'}{p^2}, & 0 \\ 0, & b', & \frac{b'\mu+b''}{p} \end{pmatrix},$$

und es lässt sich zeigen, dass entweder die erste Form oder, wenn μ durch die Congruenz bestimmt wird $b'\mu+b'' \equiv 0 \bmod. p^{|b'|+1}$, die zweite die Eigenschaft hat, dass ihre Coefficienten ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, die Coefficienten der adjungirten Formen

$$\begin{pmatrix} 0, & \left(\frac{b'}{p}\right)^2, & b''^2-aa' \\ -\frac{b'b''}{p}, & \frac{a'b'}{p}, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0, & b'^2, & \frac{(b'\mu+b'')^2-aa'}{p^2} \\ \frac{-b'(b'\mu+b'')}{p}, & \frac{a'b'}{p^2}, & 0 \end{pmatrix}$$

aber den grössten gemeinschaftlichen Theiler Ω haben. Für Letzteres genügt der Nachweis, dass $p^{|\Omega|}$ die höchste in diesem grössten gemeinschaftlichen Theiler aufgehende Potenz von p ist.

Ich unterscheide in Bezug auf die Primzahl p folgende Fälle und füge jedesmal die Substitution bei, welche der Forderung genügt.

(1.) $|a'| = 0$. Aus der Gleichung $a'b''^2 = \Omega^2\Delta p^2$ folgt $|b'| > |\Omega|$; daher ist $|b''^2-aa'| = |\Omega|$. (*A.*)

(2.) $|a'| > 0$, $|b'| = 0$; daher $|\Omega| = 0$, $|a'| > 1$. (*B.*)

(3.) $|a'| > 0$, $|b'| > 0$, $|\Omega| = 0$; daher $|b''^2-aa'| = 0$. (*A.*)

In den übrigen Fällen sind $|a'|$, $|b'|$, $|\Omega|$ sämmtlich >0; daher $|b''|>0$, $|a|=0$.

(4.) $|a'|=1$; daher $|\Omega|=1$, $|\Delta|>0$, $|b'|>1$. (*A.*)

(5.) $|a'|=2$; daher $|b'|\geqq|\Omega|=|b''^2-aa'|\geqq 2$. (*A.*)

(6.) $\begin{cases} |a'| \text{ gerade und } >2;\ |\Omega|<|a'|; \text{ daher} \\ \quad\text{entweder } |\Omega|=2|b''|<2|b'| \quad (A.) \\ \quad\quad\text{oder } |\Omega|=2|b'|\leqq 2|b''| \quad (B.) \end{cases}$

(7.) $\left.\begin{cases} |a'| \text{ gerade und } >2;\ |\Omega|\geqq|a'|; \text{ daher} \\ 2|b'|\geqq 2|\Omega|+2-|a'|\geqq|\Omega|+2;\ 2|b''|\geqq|a'|,\ |b'b''|\geqq|\Omega|+1, \\ \quad |a'b'|>|\Omega|+1,\ |b''^2-aa'|=|\Omega|. \end{cases}\right\}$ (*A.*)

(8.) $\begin{cases} |a'| \text{ ungerade und } >2;\ |\Omega| \text{ gerade; daher } |a'|>|\Omega| \text{ und} \\ \quad\text{entweder } |\Omega|=2|b''|<2|b'|, \quad (A.) \\ \quad\text{oder } |\Omega|=2|b'|\leqq 2|b''|,\ |a'|>|\Omega|+2. \quad (B.) \end{cases}$

(9.) $\left.\begin{cases} |a'| \text{ ungerade und } >2;\ |\Omega| \text{ ungerade; daher } |a'|=|\Omega|, \\ \quad 2|b'|>|\Omega|+2,\ 2|b''|>|\Omega|,\ |b''^2-aa'|=|\Omega|. \end{cases}\right\}$ (*A.*)

10. Bekanntlich lässt sich jede Substitution der Determinante p (mit ganzzahligen Coefficienten) in die Form ESE' bringen, wo E eine willkürlich zu wählende Substitution der Determinante 1 bedeutet, S eine nach Festsetzung von E völlig bestimmte *reducirte* Substitution der Determinante p, d. h. eine Substitution der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0, & 0 \\ \lambda', & \mu', & 0 \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}, \quad (0\leqq\lambda'<\mu',\quad 0\leqq\lambda''<\nu'',\quad 0\leqq\mu''<\nu'')$$

und E' eine ebenfalls bestimmte Substitution der Determinante 1. Hieraus und aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dass es, um alle primitiven Nullklassen der Invarianten Ω, Δp^2 zu finden, genügt, aus jeder Klasse von primitiven Nullformen der Invarianten Ω, Δ eine beliebige Form herauszunehmen, auf dieselbe sämmtliche reducirte Substitutionen S anzuwenden, von den erhaltenen Formen diejenigen, welche nicht primitiv sind, oder nicht zu den Invarianten Ω, Δp^2 gehören, zu streichen und von den noch übrig gebliebenen nur nicht-äquivalente beizubehalten.

Anstatt sämmtliche reducirte Substitutionen anzuwenden, kann man auch alle Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0, & 0 \\ \lambda', & \mu', & 0 \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}$$

anwenden, in welchen λ, μ', ν'' positiv sind, ihr Product $= p$ und λ' irgend ein vollständiges Restsystem mod. μ', λ'', μ'' beliebige vollständige Restsysteme mod. ν'' durchlaufen.

Um die Darstellung zu vereinfachen, gebe ich hier gleich das Endresultat der ganzen Untersuchung an und führe die Beweise zum Theil synthetisch.

11. Es seien also Ω, Δ irgend welche positive ungerade Zahlen. Um ein vollständiges System nicht-äquivalenter Nullformen der Invarianten Ω, Δ zu erhalten, stelle man Ω und Δ als Producte von Potenzen unter sich verschiedener Primzahlen dar, reducire in jeder Potenz den Exponenten auf 2 oder 1, je nachdem derselbe gerade oder ungerade ist, und erhalte so aus Ω und Δ bezw. Ω_1 und Δ_1; es sei $\Omega = \Omega_1 \mathrm{S}^2$, $\Delta = \Delta_1 \mathrm{T}^2$. Dann enthalten Ω_1 und Δ_1 keine kubischen Factoren mehr. Es sei nun P^2 der grösste quadratische Theiler von Δ_1, welcher auch in Ω_1 aufgeht und Q^2 der grösste quadratische Theiler von Δ_1, welcher zu Ω_1 prim ist, und $\Delta_1 = \mathrm{P}^2\mathrm{Q}^2\Delta_2$. Endlich sei $\mathrm{P}^2\mathrm{R}^2$ der grösste quadratische Theiler von Ω_1, welcher zu Δ_2 prim ist, und $\Omega_1 = \mathrm{P}^2\mathrm{R}^2\Omega_2$. Dann sind P, Q, R, Δ_2 relativ prim, ebenso P, Q, R, Ω_2, und Ω_2, Δ_2 sind Invarianten, wie sie im ersten Theil betrachtet warden; es sei also wie dort

$$\Omega_2 = \Theta'\Omega'^2\Delta'\Omega'', \quad \Delta_2 = \Theta'\Delta'^2\Omega'\Delta''.$$

Die Nullformen der Invarianten Ω_2, Δ_2 wurden im ersten Theil auf die Gestalt reducirt

$$\begin{pmatrix} 0, & \Theta'\Omega'^3\Delta'', & r\Delta'\Omega'' \\ 0, & \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega'', & 0 \end{pmatrix}, \quad r \text{ prim zu } \Theta'\Omega'\Delta'.$$

Für den gegenwärtigen Zweck ist dieselbe weniger geeignet, und es soll daher gezeigt werden, dass jede solche Form in eine andere $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$ transformirt werden kann, in welcher

$$a' = \Theta'\Omega'^3\Delta'', \quad b' = \Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega'', \quad b'' = \Theta'\Omega'$$

ist und aA'' prim zu $\Omega_2\Delta_2 M$, wo M irgend eine relative Primzahl zu $2\Omega_2\Delta_2$ ist (d. h. man kann aA'' prim zu jeder beliebigen ungeraden Zahl machen).

Transformirt man nämlich die reducirte Form durch die Substitution

$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & 1 \\ \alpha', & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, so geht sie über in $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$, wo a', b' die angegebenen Werthe haben und wo

$$a = \Theta'\Omega'^3\Delta''\alpha'^2 + r\Delta'\Omega'' + 2\Theta'\Omega'\Delta'^2\Omega''\alpha, \quad b'' = \Theta'\Omega'(\Omega'^2\Delta''\alpha' + \Delta'^2\Omega''\beta).$$

Man kann nun zunächst α' und β so bestimmen, dass $\Omega'^2\Delta''\alpha' + \Delta'^2\Omega''\beta = 1$ wird. Dann wird a prim zu $\Theta'\Omega'\Omega''\Delta'$, und um a zu Δ'' prim zu machen, muss α so gewählt werden, dass $(r + 2\Theta'\Omega'\Delta'\alpha)$ prim zu Δ'' ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} A'' &= \Theta'\Delta'(\Omega'^2\Delta''\alpha' + 1)\beta - \Omega'\Delta''(r + 2\Theta'\Omega'\Delta'\alpha) \\ &= \Theta'\Delta'(2 - \Delta'^2\Omega''\beta)\beta - \Omega'\Delta''(r + 2\Theta'\Omega'\Delta'\alpha), \end{aligned}$$

woraus man leicht erkennt, dass A'' schon prim ist zu $\Theta'\Omega'\Delta'\Delta''$. Soll A'' also zu $\Omega_2\Delta_2$ prim sein, so ist noch $\{2\Theta'\Delta'\beta - \Omega'\Delta''(r + 2\Theta'\Omega'\Delta'\alpha)\}$ prim zu Ω'' zu machen.

Sollen nun ferner a und A'' durch den Primfactor p von M nicht theilbar sein, so genügt es, die Zahlen a und $(\Theta' - \Omega'\Delta''a)$ durch p nicht theilbar zu machen, weil $\Delta'\Omega''A'' = \Theta' - \Omega'\Delta''a$ ist. Die bisherigen Bedingungen erlauben aber α, somit auch a ein vollständiges Restsystem mod. p durchlaufen zu lassen. In einem solchen System giebt es aber immer ein durch p nicht theilbares a, für welches auch $(\Theta' - \Omega'\Delta''a)$ nicht durch p theilbar ist. Hieraus folgt das Behauptete leicht.

Im Folgenden kann und soll daher vorausgesetzt werden, dass aA'' prim sei zu $\Omega\Delta$, und zwar (wie sich später ergeben wird) nicht nur für die Formen der Invarianten Ω_2, Δ_2, sondern auch für alle daraus abgeleiteten. Die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von P, Q, R sei bezw. $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$.

Man stelle nun ein vollständiges System nicht-äquivalenter Nullformen $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$ der Invarianten Ω_2, Δ_2 auf. Aus jeder derselben ergeben sich $2^{\mathfrak{p}+\mathfrak{r}}$ Klassen

$$\begin{pmatrix} a_1, & P^2R^2a', & 0 \\ 0, & PRb', & PRb''_1 \end{pmatrix} \text{ der Inv. } \Omega_1, \ \Delta_2,$$

welche aber in lauter verschiedene Geschlechter gehören; aus jeder der letztern wieder $2^{\mathfrak{q}}$ Klassen

$$\begin{pmatrix} a_2, & P^2R^2a', & 0 \\ 0, & PQRb', & PRb''_2 \end{pmatrix} \text{ der Inv. } \Omega_1, \ \Delta_2Q^2,$$

die in ebensoviele Geschlechter zerfallen; aus jeder solchen Klasse eine

Anzahl von Klassen der Invarianten Ω_1, Δ_1, die in $2^{\mathfrak{p}}$ Geschlechter mit je 2^{σ} ($0 \leqq \sigma \gtreqless \mathfrak{p}$) Klassen zerfallen und die im Allgemeinen durch Formen

$$\begin{pmatrix} a_3, & P^2R^2a', & 0 \\ 0, & P^2QRb', & PRb''_3 \end{pmatrix}$$

repräsentirt werden, jedoch, wenn $P \equiv 0$ (mod. 3 oder 5 oder 15), unter später zu erörternden Umständen durch Formen

$$\begin{pmatrix} a_3, & k^2P^2R^2a', & 0 \\ 0, & \frac{1}{k}P^2QRb', & PRb''_3 \end{pmatrix}, \quad \text{wo } k = 3 \text{ oder } 5 \text{ oder } 15.$$

Endlich ergiebt sich aus jeder Klasse der Invarianten Ω_1, Δ_1 eine und nur eine Klasse

$$\begin{pmatrix} a_3, & k^2P^2R^2S^2a', & 0 \\ 0, & \frac{1}{k}P^2QRSTb', & PRSb''_3 \end{pmatrix}$$

der Invarianten Ω, Δ, wo $k = 1$ oder 3 oder 5 oder 15.

Bezeichnet man letztere Form wieder kurz mit $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$, so findet man in Bezug auf irgend einen Primfactor von $\Omega\Delta$ im Allgemeinen

$$|a'| = |\Omega| + |\Omega'\Delta''| - |\Delta'\Omega''|, \quad 2|b'| = |\Omega\Delta| - |\Omega'\Delta''| + |\Delta'\Omega''|;$$

also wenn

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & |\Omega| \equiv |\Delta| \quad (\text{mod. } 2): |a'| = |\Omega|, & 2|b'| = |\Omega| + |\Delta|, \\ \text{II.} & |\Omega| \equiv 0, \quad |\Delta| \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2): |a'| = |\Omega| + 1, & 2|b'| = |\Omega| + |\Delta| - 1, \\ \text{III.} & |\Omega| \equiv 1, \quad |\Delta| \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2): |a'| = |\Omega| - 1, & 2|b'| = |\Omega| + |\Delta| + 1. \end{array}$$

In den Ausnahmefällen für den Primfactor 3 oder 5 wird $|a'|$ um 2 grösser, $|b'|$ um 1 kleiner.

Analoge Formeln gelten auch für die Formen der vorhergehenden Stufen. Zur Vermeidung von Missverständnissen sollen die Endinvarianten Ω, Δ in der Folge mit Ω_e, Δ_e bezeichnet werden.

12. Auf eine der im vorigen Artikel betrachteten Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$, deren Invarianten Ω, Δ Theiler sind von Ω_e, Δ_e und in welcher aA'' prim ist zu $\Omega_e\Delta_e$, soll jetzt eine der oben besprochenen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \lambda, & 0, & 0 \\ \lambda', & \mu', & 0 \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}$$

der Determinante p angewandt werden, um sie in eine primitive Form der

Invarianten Ω, Δp^2 überzuführen. Die Substitution $\lambda = p$, $\mu' = \nu'' = 1$, $\lambda' = \lambda'' = \mu'' = 0$ ist hierbei auszuschliessen; denn sie würde die Form in $\begin{pmatrix} ap^2, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''p \end{pmatrix}$ verwandeln, deren Invarianten sind Ωp, Δ oder Ωp^2, $\frac{\Delta}{p^2}$.

Es kommen daher nur die folgenden Fälle in Betracht:

$$(1.)\qquad \lambda = 1,\quad \mu' = p,\quad \nu'' = 1,\quad \lambda'' = \mu'' = 0,$$

welcher die Form liefert

$$\varphi = \begin{pmatrix} a+2b''\lambda'+a'\lambda'^2, & a'p^2, & 0 \\ 0, & b', & (a'\lambda'+b'')p \end{pmatrix}$$

mit der Adjungirten

$$\Omega\Phi = \Omega\begin{pmatrix} 0, & A', & A''p^2 \\ (B-B'\lambda')p, & B'p^2, & 0 \end{pmatrix};$$

(2.) $\lambda = \mu' = 1$, $\nu'' = p$, $\lambda' = 0$; λ'', $\mu'' \equiv 0, 1, 2, \ldots p-1 \pmod{p}$, welcher die Form liefert

$$\psi = \begin{pmatrix} a+2b'\lambda'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu'' \end{pmatrix}$$

mit der Adjungirten

$$\Omega\Psi = \Omega\begin{pmatrix} 0, & A'p^2, & A''-2B'\lambda''-2B\mu''+A'\mu''^2 \\ (B-A'\mu'')p, & B'p, & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit die Formen φ und ψ wirklich primitiv seien und die Invarianten Ω, Δp^2 haben, ist nothwendig und hinreichend, dass

$$\text{für } \varphi:\quad 2|b'|_p = |\Omega|_p;\quad |\Omega|_p . |a+2b''\lambda'+a'\lambda'^2|_p = 0,$$

$$\text{für } \psi:\quad |(b''+b'\mu'')^2-(a+2b'\lambda'')a'|_p = |\Omega|_p.$$

13. Zuvörderst ist zu untersuchen, ob die Formen φ und ψ nur *einem* Geschlecht angehören oder nicht. In Bezug auf die von p verschiedenen Primfactoren von $\Omega\Delta$ ist sofort klar, dass die Charaktere dieser Formen sämmtlich übereinstimmen mit denjenigen von $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$. Es bleiben daher nur die Charaktere (mod. p) zu discutiren.

Ist $|\Omega| > 0$, so ist $|b'| > 0$, $|b''^2 - aa'| > 0$, ausserdem $|a| = 0$; daher

$$a(a+2b''\lambda'+a'\lambda'^2) \equiv (a+b''\lambda')^2,\quad a+2b'\lambda'' \equiv a \pmod{p};$$

also

$$\left(\frac{\varphi}{p}\right) = \left(\frac{\psi}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right).$$

Ebenso

$$\left(\frac{\Phi}{p}\right) = \left(\frac{A'}{p}\right).$$

Ist $|\Delta| > 0$, so ist $|B'| > 0$, $|B^2 - A'A''| > 0$, ferner $|A''| = 0$; daher

$$A''(A'' - 2B'\lambda'' - 2B\mu'' + A'\mu''^2) \equiv (A'' - B\mu'')^2 \pmod{p};$$

also

$$\left(\frac{\Psi}{p}\right) = \left(\frac{A''}{p}\right) \text{ und, wenn } \varphi \text{ brauchbar, } = \left(\frac{A'}{p}\right) = \left(\frac{\Phi}{p}\right).$$

Ist $|\Delta| = 0$, so können $|A'|$, $|B|$, $|B'|$ nicht sämmtlich > 0 sein, und man kann λ'' und μ'' stets so wählen, dass $A'' - 2B'\lambda'' - 2B\mu'' + A'\mu''^2$ jeden beliebigen quadratischen Charakter (mod. p) erhält, ausgenommen, wenn

$$p = 3, \quad B \equiv B' \equiv A' + A'' \equiv 0 \pmod{3};$$

also

$$|a'| = 2|b'| = |\Omega| > 0, \quad |b''| > |b'|, \quad a \equiv a_1' \pmod{3};$$

dann aber ist

$$\left(\frac{\Phi}{3}\right) = -\left(\frac{\Psi}{3}\right).$$

Also gilt der Satz:

Die Gesammtheit der Formen φ und ψ gehört nur einem Geschlecht oder zwei Geschlechtern an, je nachdem Δ durch p theilbar ist oder nicht.

14. In der Untersuchung der Aequivalenz der Formen φ und ψ sind drei Fälle zu unterscheiden. Es sind zu vergleichen 1) die Formen φ unter sich, 2) die Formen ψ unter sich, 3) die Formen φ mit den Formen ψ. Um aber diese Fälle vorerst noch beisammen zu behalten, betrachte ich die Formen

$$\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'h, & b'' \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_1, & a'h^2, & 0 \\ 0, & b', & b_1'' \end{pmatrix},$$

wo h eine ganze positive Zahl bedeute, und suche eine Substitution (in ganzen Zahlen)

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}, \quad \text{(Determinante = 1)},$$

welche die erste in die zweite transformirt. Die Transformationsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
&(1.) & a_1 &= a\alpha^2 + a'\alpha'^2 + 2b'h\alpha''\alpha + 2b''\alpha\alpha', \\
&(2.) & a'h^2 &= a\beta^2 + a'\beta'^2 + 2b'h\beta''\beta + 2b''\beta\beta', \\
&(3.) & 0 &= a\gamma^2 + a'\gamma'^2 + 2b'h\gamma''\gamma + 2b''\gamma\gamma', \\
&(4.) & 0 &= a\beta\gamma + a'\beta'\gamma' + b'h(\beta\gamma'' + \gamma\beta'') + b''(\beta\gamma' + \gamma\beta'), \\
&(5.) & b' &= a\gamma\alpha + a'\gamma'\alpha' + b'h(\gamma\alpha'' + \alpha\gamma'') + b''(\gamma\alpha' + \alpha\gamma'), \\
&(6.) & b_1'' &= a\alpha\beta + a'\alpha'\beta' + b'h(\alpha\beta'' + \beta\alpha'') + b''(\alpha\beta' + \beta\alpha').
\end{aligned}$$

Aus $\gamma = 0$ folgt successive

$$\gamma' = 0, \quad \beta = 0, \quad h\alpha\gamma'' = 1;$$

also

$$h = 1, \quad \alpha\gamma'' = 1, \quad \alpha = \gamma'' = \pm 1, \quad \beta' = 1;$$

also ist die Annahme $\gamma = 0$ nur statthaft für $h = 1$, und das System reducirt sich dann auf die beiden Gleichungen

$$a_1 = a + a'\alpha'^2 \pm 2b'\alpha'' \pm 2b''\alpha', \quad b_1'' = a'\alpha' \pm b'\beta'' \pm b'',$$

also auf die Congruenzen

$$a'\alpha'^2 \pm 2b''\alpha' + a \equiv a_1 \text{ (mod. } 2b'), \quad a'\alpha' \pm b'' \equiv b_1'' \text{ (mod. } b').$$

Ist $\gamma \gtrless 0$, so löse ich die Gleichungen zuerst algebraisch und setze zu diesem Zweck

$$\gamma = \varkappa^2, \quad \gamma' = \varkappa\lambda; \quad \text{also} \quad \lambda^2 = \frac{\gamma'^2}{\gamma}.$$

Dann folgt aus (3.), (4.), (2.):

$$\begin{aligned} 2b'h\gamma'' &= -a\varkappa^2 - 2b''\varkappa\lambda - a'\lambda^2, \\ 0 &= (a\varkappa^2 - a'\lambda^2)\beta + 2(b''\varkappa + a'\lambda)\varkappa\beta' + 2b'h\varkappa^2\beta'', \\ \lambda\beta &= \varkappa(\beta' \pm h), \end{aligned}$$

und wenn man β' aus den beiden letzten Gleichungen eliminirt:

$$0 = (a\varkappa^2 + 2b''\varkappa\lambda + a'\lambda^2)\beta \mp 2(b''\varkappa + a'\lambda)\varkappa h + 2b'h\varkappa^2\beta'',$$

woraus

$$b'(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') = \mp(b''\varkappa + a'\lambda)\varkappa;$$

ausserdem ist

$$2b'(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') = \pm(a\varkappa^2 - a'\lambda^2).$$

Bildet man $\beta(5) - \gamma(6)$, so erhält man

$$b'\beta - b_1''\gamma = \pm a'h\varkappa(\varkappa\alpha' - \lambda\alpha)$$

und aus (5.) und (1.)

$$\begin{aligned} 2b' &= (a\varkappa^2 - a'\lambda^2)\alpha + 2(b''\varkappa + a'\lambda)\varkappa\alpha' + 2b'h\varkappa^2\alpha'', \\ 2b'\alpha &= a_1\varkappa^2 - a'(\varkappa\alpha' - \lambda\alpha)^2, \end{aligned}$$

und wenn man α' aus der drittletzten Gleichung substituirt:

$$\begin{aligned} 2a'b'h\varkappa &= (a\varkappa^2 + 2b''\varkappa\lambda + a'\lambda^2)a'h\varkappa\alpha \pm 2(b''\varkappa + a'\lambda)(b'\beta - b_1''\gamma) + 2a'b'h^2\varkappa^3\alpha'', \\ 2a'b'h^2\varkappa^2\alpha &= a_1a'h^2\varkappa^4 - (b'\beta - b_1''\gamma)^2. \end{aligned}$$

Die Werthe von $\varkappa$, λ, β bleiben unbestimmt; die übrigen Substitutionscoefficienten ergeben sich daraus mit Hülfe der entwickelten Gleichungen. Als Substitutionsdeterminante ergiebt sich ± 1; daher sind nur die obern Zeichen beizubehalten.

Es handelt sich jetzt darum, ganzzahlige Substitutionscoefficienten zu erhalten. Ist k^2 das grösste in γ aufgehende Quadrat, so ist $r = \frac{\gamma}{k^2}$ ein Product aus lauter verschiedenen Primzahlen. Dann wird

$$\lambda = \frac{\gamma'}{\varkappa} = \frac{\gamma'}{kr}\sqrt{r} = \frac{l}{s}\sqrt{r},$$

wo l und s relativ prim vorausgesetzt werden können und sollen. Ferner wird

$$\gamma = k^2 r,\quad s\gamma' = rkl,\quad 2b'hs^2\gamma'' = -(ak^2s^2 + 2b''ksl + a'l^2)r,$$

$$(\beta' + h)ks = \beta l;\quad 2b'hk^2s^2\beta'' = -(ak^2s^2 + 2b''ksl + a'l^2)\beta + 2(b''ks + a'l)ksh,$$

$$2a'b'h^2k^2r\alpha = a_1 a' h^2 k^4 r^2 - (b'\beta - b_1'' k^2 r)^2,$$

$$a'hk^2 sr\alpha' = a'hklr\alpha + s(b'\beta - b_1'' k^2 r),$$

$$2a'b'h^2k^3s^2r\alpha'' = -(ak^2s^2 + 2b''ksl + a'l^2)a'hkr\alpha - 2(b''ks + a'l)(b'\beta - b_1''k^2r)s + 2a'b'hks^2.$$

Untersuchung der Aequivalenz der Formen φ.

15. Um auf die Formen φ zu kommen, ist im Vorhergehenden a' durch $a'p^2$, b'' durch $b''p$ zu ersetzen,

$$a_1 = a + 2b''\lambda' + a'\lambda'^2,\quad h = 1,\quad b_1'' = (b'' + a'\lambda')p$$

zu machen. Man erhält dann für die Aequivalenz einer beliebigen Form φ mit derjenigen Form φ, welche der Annahme $\lambda' = 0$ entspricht, wenn $\gamma = 0$ genommen wird, die Congruenzen

$$a'p^2\alpha'^2 \pm 2b''p\alpha' \equiv a'\lambda'^2 + 2b''\lambda' \pmod{2b'},\quad a'p^2\alpha' \pm b''p \equiv (b'' + a'\lambda')p \pmod{b'}.$$

Wählt man das obere Zeichen, so sind dieselben lösbar; denn da nach Artikel 12 im vorliegenden Falle in Bezug auf p ist $|\Omega| = 2|b'|$, also $|a'| = |\Omega| + |\Delta| \geqq 2|b'|$ und wegen $|b''^2 - aa'| = |\Omega|$, $|b''| \geqq |b'|$, so genügt es $p\alpha' \equiv \lambda' \pmod{2b_0'}$ zu machen. Also gilt der Satz:

Die Formen φ sind sämmtlich äquivalent.

Untersuchung der Aequivalenz der Formen ψ.

16. Da die Annahme $\lambda'' = \mu'' = 0$ mit der Bedingung

$$|(b'' + b'\mu'')^2 - (a + 2b'\lambda'')a'|_p = |\Omega|_p$$

des Artikels 12 verträglich ist, untersuche ich zunächst die Aequivalenz der Formen

$$\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a+2b'\lambda'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b_1'' \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung, dass dieselben dem gleichen Geschlecht angehören,

d. h. dass A'' und $A''_1 = A'' - 2B'\lambda'' - 2B\mu'' + A'\mu''^2$ denselben quadratischen Charakter (mod. p) haben. Die Transformationsformeln ergeben sich aus denen des Artikels 14 für $k = 1$, indem b' durch $b'p$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned}
&(1.) \quad a_1 = a\alpha^2 + a'\alpha'^2 + 2b'p\alpha''\alpha + 2b''\alpha\alpha',\\
&(2.) \quad a' = a\beta^2 + a'\beta'^2 + 2b'p\beta''\beta + 2b''\beta\beta',\\
&(3.) \quad 0 = a\gamma^2 + a'\gamma'^2 + 2b'p\gamma''\gamma + 2b''\gamma\gamma',\\
&(4.) \quad 0 = a\beta\gamma + a'\beta'\gamma' + b'p(\beta\gamma'' + \gamma\beta'') + b''(\beta\gamma' + \gamma\beta'),\\
&(5.) \quad b'p = a\gamma\alpha + a'\gamma'\alpha' + b'p(\gamma\alpha'' + \alpha\gamma'') + b''(\gamma\alpha' + \alpha\gamma'),\\
&(6.) \quad b''_1 = a\alpha\beta + a'\alpha'\beta' + b'p(\alpha\beta'' + \beta\alpha'') + b''(\alpha\beta' + \beta\alpha').
\end{aligned}$$

Wenn $\mu'' = 0$ und $|a'|_p > |b''|_p \leqq |b'|_p$ ist, so lassen sich diese Gleichungen durch die Annahme $\gamma = 0$ lösen; denn die betreffenden Congruenzen des Artikels 14 reduciren sich für das obere Zeichen auf

$$\alpha' \equiv 0 \pmod{2}, \quad a\alpha' \equiv 0 \pmod{b'p}, \quad b''\alpha' \equiv b'\lambda'' \pmod{b'p}$$

und sind für $|a'|_p > |b''|_p \leqq |b'|_p$ lösbar.

Ist $\gamma \gtrless 0$, so erhält man aus Artikel 14 für die Substitutionscoefficienten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(7.) \quad \gamma = k^2 r, \quad s\gamma' = rkl, \quad 2b'ps^2\gamma'' = -(ak^2s^2 + 2b''ksl + a'l^2)r,\\
&(8.) \quad ks(\beta'+1) = l\beta, \quad 2b'pk^2s^2\beta'' = -(ak^2s^2 + 2b''ksl + a'l^2)\beta + 2(b''ks + a'l)ks,\\
&(9.) \quad 2a'b'prk^2\alpha = a_1 a' r^2 k^4 - (b'p\beta - b''_1 rk^2)^2,\\
&(10.) \quad a'rk^2s\alpha' = a'rkl\alpha + s(b'p\beta - b''_1 rk^2),\\
&(11.) \quad 2a'b'prk^3s^2\alpha'' = -(ak^2s^2 + 2b''ksl + a'l^2)a'rk\alpha - 2(b''ks + a'l)(b'p\beta - b''_1 rk^2)s + 2a'b'pks^2.
\end{aligned}$$

Es handelt sich jetzt darum, die ganzen Zahlen k, l, r, s, β so zu wählen, dass die Substitutionscoefficienten ganzzahlig werden. Zur Abkürzung heisse ein irreductibler Bruch $\frac{a}{b}$ ganzzahlig in Bezug auf eine Primzahl p oder (mod. p), wenn der Nenner b den Primfactor p nicht enthält. Bemerkt man nun, dass nach den Gleichungen (7.), weil l und s relativ prim sind, s^2 in $a'r$, daher s in a', ferner r in γ, $\gamma's$, $2b'ps\gamma''$, daher in $2a'b'p$ aufgehen muss, so erkennt man, dass es genügt zu untersuchen, ob die Substitutionscoefficienten ganzzahlig gemacht werden können in Bezug auf die Primfactoren von $2\Omega\Delta pk$. Es soll nun versucht werden, k, l, r, s, β nach Potenzen der in $2\Omega\Delta p$ aufgehenden Primzahlen und sodann l, r, s, β nach Potenzen der übrigen in k aufgehenden Primzahlen

als Moduln durch Congruenzen so zu bestimmen, dass die Substitutionscoefficienten die genannten Bedingungen erfüllen.

17. Die Untersuchung ergiebt, dass die Substitutionscoefficienten (mod. p) ganzzahlig gemacht werden können, wenn $r_0 = rp^{-|r|}$ (Art. 9) in Bezug auf p einer der folgenden Bedingungen gemäss bestimmt werden kann:

Wenn

$$|\Omega| = 0,$$

keine Bedingung; wenn

$$|\Omega| . |\Delta| > 0$$

und

$$\begin{array}{ll} (1.) & \left. \begin{array}{r} |a'| = 2|b''| < |\Omega| \\ \text{oder } |a'| = |\Omega| < 2|b''| \end{array} \right\} : \pm 2a'_0 b'_0 r_0 Rp, \quad \pm 2a'_0 b'_0 r_0 \Omega_0 A'' Rp, \\ (2.) & |a'| > |\Omega| = 2|b''| : \pm 2a'_0 b'_0 r_0 Rp, \quad \pm 2ab'_0 r_0 Rp, \\ (3.) & |a'| = 2|b''| = |\Omega| : \begin{cases} -2a'_0 b'_0 r_0 Rp, & 2ab'_0 r_0 Rp, \\ 2a'_0 b'_0 r_0 \Omega_0 A'' Rp, & -2ab'_0 r_0 \Omega_0 A'' Rp. \end{cases} \end{array}$$

Von den übrigen Fällen ($|\Delta|_p = 0$), wird nur der Fall $|\Omega|_p = 2$ noch in Betracht kommen. Derselbe soll später ausführlicher untersucht werden.

Für den gegenwärtigen Zweck genügt es zu zeigen, dass in allen oben angeführten Fällen die Bedingung hinreicht

$$-2a'_0 b'_0 r_0 Rp, \quad |r|_p \equiv |a'b'p|_p \pmod{2},$$

welche immer erfüllt werden kann, indem man $-r$ dem Product Π aller derjenigen verschiedenen Primzahlen gleichsetzt, welche in $2a'b'p$ in ungerader Potenz aufgehen. Beim Beweise ist in der Regel folgender Satz in Anwendung zu bringen:

Sind $f_1, f_2, \ldots f_m$ ganze Functionen mit ganzzahligen Coefficienten der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ ($m \leqq n$), und sind die Congruenzen

$$f_1 \equiv 0, \quad f_2 \equiv 0, \quad \ldots \quad f_m \equiv 0$$

lösbar nach einem Primzahlmodul p, so sind sie es auch nach beliebigen Potenzen von p als Moduln, wenn wenigstens eine der $\binom{n}{m}$ Functionaldeterminanten, die sich aus m von den n Colonnen

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array}$$

bilden lassen, für wenigstens *ein* System von Auflösungen der obigen Congruenzen nicht durch p theilbar ist.

In folgender Tabelle stelle ich die Werthe zusammen, welche für $|\gamma|_p$ und $|\gamma'|_p$ angenommen werden können oder müssen, um für $r = -\Pi$ lösbare Congruenzen zu erhalten:

I. $|\Omega| = 0,\ |\Delta| \geqq 0$ oder $|\Omega| = 1,\ |\Delta| > 0 : |\gamma| = |a'b'p|, \quad |\gamma'| = |b'p|$,

II. $|\Omega| > 1,\ |\Delta| > 0, \quad |a'| = 2|b''| < |\Omega| \quad : |\gamma| = |b'p| + 2\sigma,\ |\gamma'| = |b'p| - |b''| + \sigma$,

(wo σ gleich der kleinern der beiden Zahlen $|b''|$, $\frac{1}{2}|\Delta|$),

III. $|\Omega| > 1,\ |\Delta| > 0, \quad |a'| = |\Omega| < 2|b''| \quad : |\gamma| = |b'p| + \varrho, \quad |\gamma'| = |b'p| - |b''| + \sigma$,

wo für $|b'| = |b''|$ oder $|b'| > |b''| \geqq |a'| \qquad : \varrho = \sigma = 2|b''| - |a'|$,

- - $|b'| \geqq |a'|$ und $|b''| < |a'|$ oder $> |b'| : \varrho = |a'|, \ \sigma = |b''|$,

- - $|a'| > |b'|$ und $|b'| \gtrless |b''| \qquad : \varrho = |\Delta|, \ \sigma = |b'| + |b''| - |a'|$,

IV. $|\Omega| > 1,\ |\Delta| > 0, \quad |a'| > |\Omega| = 2|b''| \quad : \gamma = |b'p| + \varrho, \ |\gamma'| = |b'p| - |b''| + \sigma$,

wo für $|b'| = |b''| \qquad : \varrho = |a'| - 2|b''|, \ \sigma = 0$,

- - $|b'| \geqq 2|b''| \qquad : \varrho = |a'|, \ \sigma = |b''|$,

- - $|b''| < |b'| < 2|b''| : \varrho = |\Delta|, \ \sigma = |b'| - |b''|$,

V. $|\Omega| > 1,\ |\Delta| > 0, \quad |a'| = 2|b''| = |\Omega|$

und $|b'| \leqq 2|b''| : |\gamma| = |\Delta b'p|, \ |\gamma'| = 2|b'| + 1 - |\Omega|$

und $|b'| > 2|b''| : |\gamma| = |\Omega b'p|, \ |\gamma'| = |b'p|$.

Da jedoch der Beweis aller dieser Fälle zu viel Raum beanspruchen möchte, beschränke ich mich darauf, den Fall II. als Beispiel zu behandeln.

18. Nimmt man $|\beta| = |b''| + \sigma$ und setzt

$$(b'' + b'u'')_0 = b_0, \quad b'_0\beta_0 = (p^\sigma b_0 k_0 + m) r_0 k_0, \quad b''_0 p^\sigma k_0 s_0 + a'_0 l_0 \equiv u s_0 \ (\text{mod.}\, p^{|b'p| + 2\sigma}),$$

so ergeben sich im Falle II. aus der Forderung, dass die Substitutionscoefficienten (mod. p) ganzzahlig werden sollen, folgende Bedingungen:

$$(u^2 - \Omega_0 A'' p^{|\Omega| - 2|b''| + 2\sigma} k_0^2)(m + b_0 p^\sigma k_0) r_0 - 2a'_0 b'_0 u \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p^{|b'p| - |b''| + \sigma}),$$

$$(a a'_0 p^{2\sigma} k_0^2 - m^2)(u - b''_0 p^\sigma k_0) r_0 + 2a'_0 b'_0 m \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p^{|b''| + \sigma}),$$

$$(u^2 - \Omega_0 A'' p^{|\Omega| - 2|b''| + 2\sigma} k_0^2)(a_1 a'_0 p^{2\sigma} k_0^2 - m^2) r_0^2 + 4a'_0 b'_0 r_0 m u \equiv (2a'_0 b'_0)^2 \ (\text{mod.}\, p^{|b'p| + 2\sigma}),$$

welches System von Congruenzen für k_0, m, u sich mittelst Einführung neuer Unbestimmten v, w, t durch das folgende ersetzen lässt:

$$r_0 mu - 2a'_0 b'_0 \equiv p^\sigma (b''_0 m - p^\sigma v) r_0 k_0 \quad (\text{mod. } p^{|b'p|+2\sigma}),$$
$$u + m \equiv p^\sigma w \quad (\text{mod. } p^{|b'p|}),$$
$$v - b''_0 w \equiv p^{|\Omega|-2|b''|} t \quad (\text{mod. } p^{|b'p|}),$$
$$(\Omega_0 A'' k_0 - t) u + b'_0 p^{\frac{1}{2}|\Delta|-\sigma} \mu'' u^2 \equiv p^\sigma \Omega_0 A'' k_0 (w + b''_0 k_0) \quad (\text{mod. } p^{\frac{1}{2}|\Delta|-\sigma+1}),$$
$$a a'_0 k_0 u + m v \equiv p^\sigma a a'_0 b''_0 k_0^2 \quad (\text{mod. } p^{|b''|-\sigma}),$$
$$2(b''_0 t + \Omega_0 A'' w) u \equiv 2a'_0 b'_0 \lambda'' p^{\frac{1}{2}|\Delta|-\sigma+|b''|} u^2 + p^\sigma \Omega_0 A'' (w^2 - a a'_0 k_0^2)$$
$$- p^{|\Omega|-2|b''|+\sigma} t^2 \quad (\text{mod. } p^{\frac{1}{2}|\Delta|+|b''|+1-\sigma}).$$

Dieses System von sechs Congruenzen ist (mod. p) lösbar für $r = -\Pi$. Ist $|b''| \leqq \frac{1}{2}|\Delta|$, also $\sigma = |b''|$, so fällt die vorletzte Congruenz weg; k_0 ist beliebig (durch p nicht theilbar) und kann immer so gewählt werden, dass $|l_0| = |u - p^\sigma b''_0 k_0| = 0$ ist. Ist $|b''| > \frac{1}{2}|\Delta|$, also $\sigma = \frac{1}{2}|\Delta|$, so wird

$$2\Omega_0 A'' k_0 \equiv -b'_0 \mu'' u \ (\text{mod. } p)$$

und, wenn $|\mu''| = 0$, wird auch $|k_0| = |l_0| = 0$. Wenn dagegen $|\mu''| > 0$, so genügt nach Artikel 16 die Annahme $\gamma = 0$.

Dass die obigen sechs Congruenzen auch nach den angegebenen Moduln lösbar sind, zeigt die Berechnung der Functionaldeterminante.

19. Es bleibt noch der Fall $|\Omega| = 2$, $|\Delta| = 0$ zu behandeln. Derselbe bedarf einer ausführlicheren Discussion. Es kann dann noch sein entweder $|a'| = |b''| = 0$ oder $|a'| = 2$, $|b'| = 1$, $|b''| \geqq 1$. Es genügt (vergl. Art. 11) den letztern Fall zu betrachten.

Aus den Transformationsgleichungen (Art. 16) folgt sofort $|\alpha| = 0$, $|\beta| > 0$, $|\gamma| > 0$. Ferner muss auch $|\gamma'| > 0$ sein; denn aus $|\gamma'| = 0$ würde folgen $|l| = 0$, $|s| = |kr| > 0$ und aus Gleichung (10.): $|b'p\beta - b''_1 k^2 r| = 2$; daher $|b''_1| = 1$, $|r| = 1$, $|k| = 0$, $|s| = 1$; sodann aus den Gleichungen (7.) und (8.) für γ'' und β'', wenn man $b'' = b_1 p$ setzt:

$$a k^2 s_0^2 + 2 b_1 k s_0 l + a'_0 l^2 \equiv 0, \quad b_1 k s_0 + a'_0 l \equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

woraus $b_1^2 - a a'_0 = \Omega_0 A'' \equiv 0$ (mod. p), gegen die Voraussetzung.

Also ist $|\gamma'| > 0$, $|\gamma''| = 0$, und aus der Gleichung für γ'' folgt, dass von den vier Zahlen

$$2 + 2|s| - |r|, \quad 2|k| + 2|s|, \quad |b''| + |k| + |l| + |s|, \quad 2 + 2|l|$$

die beiden kleinsten gleich sein müssen. Da $|\gamma'| > 0$, so sind nur die beiden Annahmen zulässig:

$$1)\ |r| = |s| = 0,\quad |k| = 1,\quad |l| \geqq 0,$$
$$2)\ |r| = |s| = |l| = 0,\quad |k| > 1,$$

welche gesondert behandelt werden müssen.

Erste Annahme. Setzt man

$$b_1'' = b_2 p,\quad b_0'\beta = pr(m+b_2 k_0)k_0 \text{ (also } b_2 = b_1 + b_0'\mu''),$$

so erhält man die Bedingungen:

$$(ak_0^2 s^2 + 2b_1 k_0 sl + a_0' l^2)(m+b_2 k_0)r \equiv 2b_0' s(b_1 k_0 s + a_0' l) \pmod{p},$$
$$(aa_0' k_0^2 - m^2)rl + 2b_0' sm \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(ak_0^2 s^2 + 2b_1 k_0 sl + a_0' l^2)(a_1 a_0' k_0^2 - m^2)r^2 + 4b_0'(b_1 k_0 s + a_0' l)rsm \equiv a_0'(2b_0' s)^2 \pmod{p^2}.$$

Wird $|l| > 0$ genommen, so reduciren sich diese Congruenzen (mod. p) auf:

$$m \equiv 0,\quad ab_2 rk_0^2 \equiv 2b_1 b_0',\quad ark_0^2 \equiv \pm 2b_0' \pmod{p}$$

und sind daher nur dann lösbar, wenn zugleich $b_1 \equiv \pm b_2$ und $\pm 2ab_0' rRp$; d. h.

$$\text{entweder } \mu'' \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } 2ab_0' rRp,$$
$$\text{oder } 2b_1 + b_0'\mu'' \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } -2ab_0' rRp.$$

Wird $|l| = 0$ genommen und $a_0' l + b_1 k_0 s \equiv us \pmod{p^2}$ gesetzt, so lauten die Bedingungen

$$(1.)\quad (u^2 - \Omega_0 A'' k_0^2)(m+b_2 k_0)r - 2a_0' b_0' u \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(2.)\quad (aa_0' k_0^2 - m^2)(u - b_1 k_0)r + 2a_0' b_0' m \equiv 0 \pmod{p},$$
$$(3.)\quad (u^2 - \Omega_0 A'' k_0^2)(a_1 a_0' k_0^2 - m^2)r^2 + 4a_0' b_0' rmu \equiv (2a_0' b_0')^2 \pmod{p^2}.$$

Die Elimination von m aus (1.) und (3.) giebt

$$(4.)\quad ru^2 \equiv 2a_0' b_0' z + \Omega_0 A'' rk_0^2 \pmod{p},$$

wo z eine Wurzel der Congruenz ist

$$A_1'' z^2 \equiv A'' \pmod{p};\ \text{d. h. } (b_2^2 - aa_0')z^2 \equiv b_1^2 - aa_0' \pmod{p}.$$

Somit reducirt sich (1.) auf

$$(1'.)\quad (m + b_2 k_0)z \equiv u \pmod{p}.$$

Eliminirt man m aus (1'.) und (2.), so kommt

$$(2'.)\quad (\Omega_0 A_1'' k_0^2 z^2 - 2b_2 k_0 zu + u^2)(u - b_1 k_0)r \equiv 2a_0' b_0' z(u - b_2 k_0 z) \pmod{p},$$

und je nachdem man k_0 oder u aus (2'.) und (4.) eliminirt:

$$\left.\begin{aligned}(5.)\quad & aru^2 \equiv b_0'\{\ aa_0' z \pm (\Omega_0 A'' + b_1 b_2 z)\} \\ (6.)\quad & a\Omega_0 A'' rk_0^2 \equiv b_0'\{-aa_0' z \pm (\Omega_0 A'' + b_1 b_2 z)\}\end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Ausserdem ist

$$\left.\begin{array}{ll}(7.) & ark_0u \equiv \pm b'_0(b_1+b_2z) \\ (8.) & (\Omega_0A''+b_1b_2z)^2-(aa'_0z)^2 \equiv \Omega_0A''(b_1+b_2z)^2\end{array}\right\} \text{(mod. } p).$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit der Congruenzen (1.), (2.), (3.) ist daher

$$(A.) \quad ab'_0r\{aa'_0z\pm(\Omega_0A''+b_1b_2z)\}Rp.$$

Da die Auflösung aber so beschaffen sein muss, dass $|k_0|=|l|=0$ ist, so darf nicht zugleich $b_1\equiv b_2\equiv 0$ (mod. p) sein; d. h. es darf nicht zugleich $|b''|>1$, $|\mu''|>0$ sein.

Ist $|b''|>1$, $|\mu''|=0$, so ist z^2 nicht $\equiv 1$ (mod. p) und die Bedingung ($A.$) lautet: $(z\mp 1)a'_0b'_0rRp$, und ist hinreichend, da dann $|k_0|=|l|=0$ wird.

Ist $|b''|=1$, $|\mu''|>0$, so kann $\gamma=0$ genommen werden; ebenso wenn $|b''|=1$, $2b_1+b'_0\mu''\equiv 0$ (mod. p), d. h. $b_1+b_2\equiv 0$ (mod. p).

In den übrigen Fällen (d. h. wenn $|b''|=1$, $|b_1\pm b_2|=0$) ist unter der Bedingung ($A.$) die Lösung immer so möglich, dass $|k_0|=|l|=0$ wird; denn nach Gleichung (7.) kann $|k_0|$ nur dann >0 werden, wenn $|b_1+b_2z|>0$, was unmöglich, weil daraus $z^2\equiv 1$, $b_1\pm b_2\equiv 0$ (mod. p) folgen würde. Da ferner das Vorzeichen von k_0 noch beliebig bleibt, kann es immer so gewählt werden, dass $|l|=|u-b_1k_0|=0$ wird.

Zweite Annahme. Es sei wieder $b''_1=b_2p$, ferner $|k|=1+\varrho$, $\varrho>0$, so folgt aus der ersten Gleichung (8.) des Art. 16, dass $|\beta|\geqq 1+\varrho$, und aus den Gleichungen (9.) und (10.), dass man setzen kann

$$b'_0\beta = p^{1+\varrho}(m+b_2p^\varrho k_0)rk_0,$$

wodurch man die Bedingungen erhält:

$$(1.) \quad (2b_1p^\varrho k_0s+a'_0l)(m+b_2p^\varrho k_0)rl-2b'_0s(b_1p^\varrho k_0s+a'_0l)\equiv 0 \text{ (mod. } p^{1+\varrho}),$$

$$(2.) \quad rlm-2b'_0s\equiv 0 \text{ (mod. } p^{1+\varrho}),$$

$$(3.) \quad p^\varrho rk_0(2a_1a'_0b_1p^\varrho k_0sl+a_1a'^2_0l^2-as^2m^2)-2b_1sm(rlm-2b'_0s)\equiv 0 \text{ (mod. } p^{2+\varrho}).$$

Mit Hülfe von (2.) reducirt sich (1.) auf

$$(1'.) \quad a'_0b_2rl^2+2b'_0b_1s^2\equiv 0 \text{ (mod. } p),$$

und aus (2.) und (3.) folgt

$$rm^2\equiv\pm 2a'_0b'_0, \quad a'_0l\equiv\pm ms \text{ (mod. } p),$$

woraus sich die Bedingungen ergeben:

$$(B.) \quad b_2\pm b_1\equiv 0 \text{ (mod. } p), \quad \pm 2a'_0b'_0rRp,$$

welche hinreichen, da sich die Congruenzen (1.), (2.), (3.) durch das System ersetzen lassen:

$$\begin{aligned} rlm-2b'_0 s &\equiv p^{1+\varrho}us \quad (\text{mod. } p^{2+\varrho}),\\ a'_0 l\mp ms &\equiv pvs \qquad (\text{mod. } p^2),\\ (ab_1p^{\varrho-1}k_0+av\pm b'_0\lambda''m)rk_0\mp b_1u &\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \end{aligned}$$

Die Bedingungen (B.) lassen sich so ausdrücken:

für $b''>1$ muss sein $\mu''\equiv 0$ (mod. p), $\pm 2a'_0b'_0 rRp$,

für $b''=1$ muss sein entweder $\mu''\equiv 0$ (mod. p) und $-2a'_0b'_0rRp$

oder $2b_1+b'_0\mu''\equiv 0$ (mod. p) und $2a'_0b'_0rRp$.

Die beiden letzten Fälle ($b''=1$) kommen indess nicht in Betracht, da für sie die Annahme $\gamma=0$ genügt. Als Resultat ergiebt sich also:

Schliesst man die eben erwähnten Fälle aus, so hat man als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Substitutionscoefficienten (mod. p) ganzzahlig werden:

$$\begin{aligned} &\text{wenn } |b''|>1,\ |\mu''|>0: \pm 2a'_0b'_0rRp \text{ oder } \pm 2ab'_0rRp,\\ &\text{wenn } |b''|\gtreqless 1,\ |\mu''|=0: ab'_0r\{aa'_0z\pm(\Omega_0A''+b_1b_2z)\}Rp. \end{aligned}$$

20. Es ergiebt sich ferner, dass die Substitutionscoefficienten in Bezug auf einen von p verschiedenen Primfactor q von $\Omega\varDelta$ ganzzahlig gemacht werden können, wenn r (in Bezug auf q) einer der folgenden Bedingungen gemäss bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } &|\Omega|>0,\ |\varDelta|=0: |r|\equiv|b'| \text{ oder } |\Omega b'| \text{ (mod. 2)},\\ &|\Omega|=0,\ |\varDelta|>0: |r|\equiv|b'| \text{ oder } |a'b'| \text{ (mod. 2)},\\ &|\Omega|>0,\ |\varDelta|>0 \end{aligned}$$

und

$$|a'|+2|b''|<|\Omega|: \begin{cases} \quad\ |r|\equiv|b'| \text{ (mod. 2) und } \pm 2a'_0b'_0r_0pRq,\\ \text{oder } |r|\equiv|\Omega b'| \text{ (mod. 2) und } \pm 2a'_0b'_0r_0p\Omega_0A''Rq, \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &|a'|=|\Omega|+2|b''|\\ \text{oder } &|a'|>|\Omega|=2|b''| \end{aligned}\right\}: \begin{cases} \quad\ |r|\equiv|b'| \text{ (mod. 2) und } \pm 2ab'_0r_0pRq,\\ \text{oder } |r|\equiv|a'b'| \text{ (mod. 2) und } \pm 2a'_0b'_0r_0pRq, \end{cases}$$

$$|a'|+2|b''|=|\Omega|: |r|\equiv|b'| \text{ (mod. 2) und } \begin{cases} \quad\ 2ab'_0r_0pRq,\\ \text{oder } -2a'_0b'_0r_0pRq,\\ \text{oder } -2ab'_0r_0p\Omega_0A''Rq,\\ \text{oder } \ 2a'_0b'_0r_0p\Omega_0A''Rq. \end{cases}$$

Auch hier genügt also in allen Fällen die Bedingung

$$-2a'_0 b'_0 r_0 p R q, \quad |r|_q \equiv |a'b'|_q \text{ (mod. 2)},$$

welche (wie im Art. 17) durch die Annahme $r = -\Pi$ erfüllt wird. Allein jetzt muss gezeigt werden, dass die obigen Bedingungen nicht bloss hinreichend, sondern auch nothwendig sind. Ich beschränke mich wieder darauf, den letzten Fall als Beispiel für die übrigen zu behandeln.

21. Es sei also in Bezug auf q

$$|a'| = 2|b''| = |\Omega| > 0, \quad |\Delta| > 0, \quad \text{folglich} \quad 2|b'| = |\Omega\Delta|, \quad |b''_1| = |b''|.$$

Aus den Gleichungen des Art. 16 folgt sofort $|\alpha| = 0$, $|\beta| > 0$, $|\gamma| > 0$. Aber auch $|\gamma'|$ muss > 0 sein; denn aus $|\gamma'| = 0$ würde folgen $|l| = 0$, $|s| = |r| + |k|$; sodann aus den Gleichungen (10.) und (8.) für α' und β':

$$|b'p\beta - b''_1 k^2 r| = |a'|, \quad |\beta| \gtreqless 2|k| + |r|, \quad 2|k| + |r| = |b''|,$$

und aus den Gleichungen (7.) und (8.) für γ'' und β'' würde folgen $b''^2_0 - aa'_0 \equiv 0$ (mod. q), gegen die Voraussetzung. Also ist $|\gamma'| > 0$, $|\gamma''| = 0$ und die Gleichung für γ'' zeigt, dass von den vier Zahlen

$$|b'| + 2|s| - |r|, \quad 2|ks|, \quad |b''kls|, \quad 2|b''l|$$

die beiden kleinsten gleich sein müssen, wonach drei Fälle zu unterscheiden sind:

$$\begin{aligned}
&(1.) \quad 2|k| + |r| = |b'|, \quad |ks| \leq |b''l|, \\
&(2.) \quad 2|l| - 2|s| + |r| = |b'| - 2|b''|, \quad |ks| > |b''l|, \\
&(3.) \quad 2|k| + |r| < |b'|, \quad |ks| = |b''l|.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich jedoch leicht, dass die dritte Annahme unstatthaft ist; denn würde man setzen $2|k| + |r| = |b'| - \varrho$, so müsste wegen $|\gamma'| = |rkl| - |s| = |b'| - |b''| - \varrho > 0$ die Zahl $\varrho < |b'| - |b''|$ sein, und aus den Gleichungen für β'' und γ'' würde folgen $b''^2_0 - aa'_0 \equiv 0$ (mod. q^ϱ), gegen die Voraussetzung. Die beiden übrig bleibenden Annahmen sind gesondert zu behandeln.

Erste Annahme. Es sei $|b''l| = |ks| + \varrho$, $\varrho \geqq 0$.

Aus der Gleichung für β'' folgt $|\beta| \geqq |b''|$, daher sei $\beta = q^{|b''|}\beta_1$ und zur Abkürzung $(b''_1)_0 = b_0$. Dann ergeben sich die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&(1.) \quad (ak_0^2 s_0^2 + 2b''_0 k_0 s_0 l_0 q^\varrho + a'_0 l_0^2 q^{2\varrho})\beta_1 \equiv 2k_0 s_0 (b''_0 k_0 s_0 + a'_0 l_0 q^\varrho) \quad (\text{mod. } q^{|b'|-|b''|}), \\
&(2.) \quad q^\varrho a'_0 k_0 l_0 r_0 \alpha + s_0 (b'_0 p \beta_1 - b_0 k_0^2 r_0) \equiv 0 \quad (\text{mod. } q^{|b''|}), \\
&(3.) \quad (ak_0^2 s_0^2 + 2b''_0 k_0 s_0 l_0 q^\varrho + a'_0 l_0^2 q^{2\varrho}) a'_0 k_0 r_0 \alpha + 2s_0 (b''_0 k_0 s_0 + a'_0 l_0 q^\varrho)(b'_0 p \beta_1 - b_0 k_0^2 r_0) \\
&\qquad\qquad \equiv 2a'_0 b'_0 p k_0 s_0^2 \quad (\text{mod. } q^{|b'|}),
\end{aligned}$$

wo

$$2a'_0 b'_0 p k_0^2 r_0 \alpha = a_1 a'_0 k_0^4 r_0^2 - (b'_0 p \beta_1 - b_0 k_0^2 r_0)^2.$$

Nimmt man $\varrho = 0$ und setzt

$$b'_0 p \beta_1 - b_0 k_0^2 r_0 = r_0 k_0 m, \quad a'_0 l_0 + b''_0 k_0 s_0 \equiv u s_0 \pmod{q^{|b'|}},$$

so erhält man die Bedingungen in der Form

$$\begin{aligned}
(u^2 - \Omega_0 A'' k_0^2)(m + b''_0 k_0) r_0 - 2a'_0 b'_0 p u &\equiv 0 && \pmod{q^{|b'|-|b''|}},\\
(a a'_0 k_0^2 - m^2)(u - b''_0 k_0) r_0 + 2a'_0 b'_0 p m &\equiv 0 && \pmod{q^{|b''|}},\\
(u^2 - \Omega_0 A'' k_0^2)(a a'_0 k_0^2 - m^2) r_0^2 + 4a'_0 b'_0 p r_0 m u &\equiv (2a'_0 b'_0 p)^2 && \pmod{q^{|b'|}}.
\end{aligned}$$

Diese Congruenzen haben (mod. q) zwei Systeme brauchbarer Lösungen:

$$\begin{aligned}
\text{entweder: } & r_0 u^2 \equiv 2a'_0 b'_0 p + \Omega_0 A'' r_0 k_0^2; \quad a\Omega_0 A'' r_0 k_0^2 \equiv -2b'_0 b''^2_0 p,\\
& b''_0 u \equiv \Omega_0 A'' k_0, \quad m \equiv u - b''_0 k_0,\\
\text{oder: } & r_0 u^2 \equiv -2a'_0 b'_0 p + \Omega_0 A'' r_0 k_0^2; \quad \Omega_0 A'' r_0 k_0^2 \equiv 2a'_0 b'_0 p,\\
& u \equiv 0, \quad m \equiv -b''_0 k_0.
\end{aligned}$$

Für beide wird die Functionaldeterminante nicht durch q theilbar; also sind die Congruenzen nach beliebigen Potenzen von q als Moduln lösbar, wenn

$$\text{entweder} \quad -2ab'_0 r_0 p \Omega_0 A'' R q \quad \text{oder} \quad 2a'_0 b'_0 r_0 p \Omega_0 A'' R q.$$

Nimmt man $\varrho > 0$, so folgt aus (1.) und (2.)

$$a r_0 k_0^2 \equiv 2b'_0 p \pmod{q},$$

also die Bedingung

$$2ab'_0 r_0 p R q,$$

welche hinreicht, wie man leicht findet, wenn man setzt:

$$\varrho = |b'|, \quad b'_0 p \beta_1 \equiv b_0 r_0 k_0^2 \pmod{q^{|b'|}}.$$

Zweite Annahme. Es sei

$$|ks| = |b''l| + \varrho, \quad \varrho > 0; \quad \text{also} \quad |\beta| \geqq |b''| + \varrho.$$

Setzt man

$$\beta = q^{|b''|+\varrho}\beta_1, \quad b'_0 p \beta_1 - q^\varrho b_0 r_0 k_0^2 = r_0 k_0 m, \quad q^\varrho b''_0 k_0 s_0 + a'_0 l_0 \equiv u s_0 \pmod{q^{|b'|+2\varrho}},$$

so erhält man Bedingungen, die sich in der Form schreiben lassen:

$$\begin{aligned}
(u^2 - q^{2\varrho}\Omega_0 A'' k_0^2)(m + q^\varrho b''_0 k_0) r_0 - 2a'_0 b'_0 p u &\equiv 0 && \pmod{q^{|b'|-|b''|+\varrho}},\\
(q^{2\varrho} a a'_0 k_0^2 - m^2)(u - q^\varrho b''_0 k_0) r_0 + 2a'_0 b'_0 p m &\equiv 0 && \pmod{q^{|b''|+\varrho}},\\
(u^2 - q^{2\varrho}\Omega_0 A'' k_0^2)(q^{2\varrho} a a'_0 k_0^2 - m^2) r_0^2 + 4a'_0 b'_0 p r_0 m u &\equiv (2a'_0 b'_0 p)^2 && \pmod{q^{|b'|+2\varrho}},
\end{aligned}$$

oder auch in der Form

$$\begin{aligned} r_0 m u - 2a_0' b_0' p &\equiv q^\varrho r_0 k_0 v && (\text{mod. } q^{|b'|+2\varrho}), \\ (b_0'' u + v) u &\equiv q^\varrho \Omega_0 A'' k_0 (q^\varrho b_0'' k_0 + m) && (\text{mod. } q^{|b'|-|b''|}), \\ (b_0'' m - v) m &\equiv q^\varrho a a_0' k_0 (q^\varrho b_0'' k_0 - u) && (\text{mod. } q^{|b''|}), \\ \Omega_0 A'' m^2 + a a_0' u^2 - v^2 &\equiv q^{2\varrho} \Omega_0 A'' a a_0' k_0^2 && (\text{mod. } q^{|b'|}). \end{aligned}$$

Diese Congruenzen geben, mod. q

$$r_0 u^2 \equiv -2a_0' b_0' p, \quad v \equiv -b_0'' u \equiv b_0'' m.$$

Man erhält somit die Bedingung $-2a_0' b_0' r_0 p R q$, welche hinreicht, wie man leicht findet, wenn man $\varrho = |b'|$ setzt.

22. Die Frage, ob die Substitutionscoefficienten ganzzahlig gemacht werden können in Bezug auf Primzahlen, welche in $\Omega\Delta p$ nicht aufgehen, erledigt sich rasch:

Zunächst in Bezug auf die Zahl 2 findet man, weil nach Art. 16 s in a' aufgehen, also ungerade sein muss, und wenn man k ungerade macht, die Bedingungen:

wenn r ungerade: $a+l \equiv 0$ (mod. 2), $\beta \equiv a + b'' + \mu''$ (mod. 2),

wenn r gerade: $a+l \equiv 1$ (mod. 2), $\beta \equiv 2(a+b''+\mu''+1)$ (mod. 4),

welchen immer genügt werden kann.

Endlich sei $\mathfrak{k}$ die höchste in k aufgehende Potenz einer Primzahl, welche nicht in $2\Omega\Delta p$ aufgeht. Da a', b', r, s keine andern Primfactoren enthalten, als solche von $2\Omega\Delta p$, so sind diese Zahlen prim zu $\mathfrak{k}$, ebenso muss l prim zu $\mathfrak{k}$ sein, damit γ, γ', γ'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. β muss durch $\mathfrak{k}$ theilbar sein; es sei $= \mathfrak{k}\beta_1$ und $k = k_0 \mathfrak{k}$. Damit β'' (mod. $\mathfrak{k}$) ganzzahlig werde, muss sein

$$l\beta_1 \equiv 2k_0 s \ (\text{mod. } \mathfrak{k});$$

und da α, α', α'' dann von selbst ganzzahlig werden, so ist diese Congruenz die einzige (und immer realisirbare) Bedingung dafür, dass die Substitutionscoefficienten (mod. $\mathfrak{k}$) ganzzahlig werden.

23. Aus den Art. 16—22 ergiebt sich, dass die Formen ψ

$$\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a+2b'\lambda'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu'' \end{pmatrix} \quad \text{der Inv. } \Omega, \ \Delta p^2,$$

wenn sie in dasselbe Geschlecht gehören, immer äquivalent sind, ausgenommen den Fall, dass $|\Omega|_p = 2$, $|\Delta|_p = 0$ und (da der Fall $|a'| = |b''| = 0$ ausgeschlossen ist) $|a'|_p = 2$, $|b'|_p = 1$, $|\mu''|_p = 0$ und $|b'\mu'' + 2b''|_p = 1$, in

welchem es für die Aequivalenz möglich sein muss, r so zu wählen, dass es den Bedingungen

$$(A.)\qquad a b'_0 r \{ a a'_0 z \pm (\Omega_0 A'' + b_1 b_2 z) \} Rp; \quad |r|_p = 0,$$
$$(b'' = b_1 p,\ b'' + b' u'' = b_2 p,\ A''_1 z^2 \equiv A''\ (\text{mod.}\ p))$$

und ausserdem den Bedingungen des Art. 20 in Bezug auf die Primzahlen q genügt.

Da das Vorzeichen von z beliebig bleibt, so repräsentirt der Ausdruck in $(A.)$ vier Werthe, und da

$$(a a'_0 z + \Omega_0 A'' + b_1 b_2 z)(a a'_0 z - \Omega_0 A'' - b_1 b_2 z) \equiv -\Omega_0 A'' (b_1 + b_2 z)^2 \ (\text{mod.}\ p),$$
$$(\Omega_0 A'' + (b_1 b_2 + a a'_0) z)(\Omega_0 A'' - (b_1 b_2 + a a'_0) z) \equiv -\ a a'_0 (b_1 + b_2)^2 z^2 \ (\text{mod.}\ p),$$

so sind die obigen Bedingungen durch die Annahme $r = -\Pi$ immer erfüllbar, ausgenommen, wenn zugleich

$$-\Omega_0 A'' Rp, \quad -a a'_0 Rp.$$

Da ferner

$$(\Omega_0 A'' + a a'_0 z + b_1 b_2 z)(\Omega_0 A'' + a a'_0 z - b_1 b_2 z) \equiv -\Omega_0 A'' a a'_0 (1-z)^2 \ (\text{mod.}\ p),$$

so ist in letzterem Fall, wenn $p \equiv 3$ (mod. 4), das Product links Nichtrest von p, daher die Form

$$\begin{pmatrix} a + 2b'\lambda'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b_2 p \end{pmatrix}$$

stets einer der Formen

$$\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & \pm b_1 p \end{pmatrix}$$

äquivalent, und somit jeder derselben, da dieselben unter sich äquivalent sind.

Um endlich, wenn

$$p \equiv 1\ (\text{mod.}\ 4), \quad -\Omega_0 A'' Rp, \quad -a a'_0 Rp,$$

über die Aequivalenz der vorgelegten Formen zu entscheiden, bilde man das Product Π_1 sämmtlicher unter sich und von p verschiedenen Primfactoren von $2a'b'$, nehme für r successive alle (positiven und negativen) Theiler von Π_1, für welche in Bezug auf jede Primzahl q wenigstens eine der bezüglichen Bedingungen des Art. 20 erfüllt ist (was z. B. für $r = -\Pi$ eintritt). Haben nicht alle diese r denselben quadratischen Charakter (mod. p), so sind die Formen äquivalent, haben diese r aber alle denselben quadratischen Charakter (also denjenigen von $-\Pi$), so sind die Formen äquivalent oder nicht, je nachdem der Ausdruck

$$2(\Omega_0 A'' + a a'_0 z + b_1 b_2 z)$$

quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist.

24. Sind nun irgend zwei Formen ψ desselben Geschlechts

$$\begin{pmatrix} a+2b'\lambda_1'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu_1'' \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a+2b'\lambda_2'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu_2'' \end{pmatrix}$$

in Bezug auf ihre Aequivalenz zu untersuchen, so setze man

$$a+2b'\lambda_1'' = a_1, \quad b''+b'\mu_1'' = b_1'', \quad \lambda_2''-\lambda_1'' = \lambda'', \quad \mu_2''-\mu_1'' = \mu''.$$

Dann lauten die Formen

$$\begin{pmatrix} a_1, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b_1'' \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_1+2b'\lambda'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b_1''+b'\mu'' \end{pmatrix},$$

wodurch die Sache auf den vorigen Fall zurückgeführt ist. Allerdings kann hier der Fall eintreten, dass a_1 und $A_1'' = \Omega^{-1}(b_1''^2-a_1a')$ nicht mehr prim sind zu $\Omega\Delta p$ (a_1 kann z. B. durch p theilbar werden, wenn $|b'|_p = |\Omega|_p = 0$ ist), jedoch sind die Tafeln der Art. 17 und 20 von diesen Voraussetzungen unabhängig. (Man erkennt auch leicht, dass, wo nach den Bedingungen dieser Tafeln die quadratischen Charaktere von a_1 und A_1'' auftreten, diese Coefficienten durch den betreffenden Modul nicht theilbar sein können, da sonst die Form nicht primitiv wäre oder nicht die Invarianten Ω, Δp^2 hätte.)

Hieraus ergiebt sich, dass alle Formen ψ, welche demselben Geschlecht angehören, einander äquivalent sind, einzig ausgenommen für $p \equiv 1$ (mod. 4), $|\Omega|_p = 2$, $|\Delta|_p = 0$ die Formen des Geschlechts

$$\left(\frac{\psi}{p}\right) = \left(\frac{a_0'}{p}\right), \quad \left(\frac{\Psi}{p}\right) = \left(\frac{\Omega_0}{p}\right),$$

welches (für $p > 5$) mehr als eine, jedoch nicht mehr als zwei Klassen von Formen ψ enthalten kann. Um Letzteres zu beweisen, bemerke ich, dass alle Formen ψ dieses Geschlechts, in welchen μ'' denselben Werth hat, äquivalent sind, und dass die Aenderung von λ'' den Charakter $\left(\frac{\Psi}{p}\right)$ nicht ändert, weil $B' \equiv 0$ (mod. p), wesswegen man in allen diesen ψ den ersten Coefficienten gleich voraussetzen kann. Es genügt daher nachzuweisen, dass, wenn die Formen

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu_1'' \end{pmatrix}$$

mit der Form $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b'' \end{pmatrix}$ in jenes Geschlecht gehören, ihr aber nicht äquivalent sind, sie einander äquivalent sein müssen. Setzt man zu diesem Zweck

$$-aa_0' \equiv c^2 \,(\text{mod.}\, p), \quad b'' = b_1 p, \quad b''+b'\mu'' = b_2 p, \quad b''+b'\mu_1'' = b_3 p, \quad b_2^2 - aa_0' = \Omega_0 A_1''$$

und bestimmt z_2, z_3, z durch die Congruenzen

$$(b_2^2+c^2)z_2^2 \equiv b_1^2+c^2, \quad (b_3^2+c^2)z_3^2 \equiv b_1^2+c^2,$$
$$(b_3^2+c^2)z^2 \equiv b_2^2+c^2 \equiv \Omega_0 A_1'' \pmod{p},$$

so erfordert die vorausgesetzte Nichtäquivalenz nach Artikel 23, dass die Ausdrücke

$$2(\Omega_0 A''+(aa_0'+b_1b_2)z_2) \quad \text{und} \quad 2(\Omega_0 A''+(aa_0'+b_1b_3)z_3)$$

beide quadratische Nichtreste von p seien.

Da aber

$$2^3\{\Omega_0 A''+(aa_0'+b_1b_2)z_2\}\cdot\{\Omega_0 A''+(aa_0'+b_1b_3)z_3\}\cdot\{\Omega_0 A_1''+(aa_0'+b_2b_3)z\}$$
$$\equiv \{c^2(1-z_2)^2+(b_1+b_2z_2)^2\}\cdot\{c^2(1-z_3)^2+(b_1+b_3z_3)^2\}\cdot\{c^2(1-z)^2+(b_2+b_3z)^2\}$$
$$\equiv 2^2\{(c^2+b_1^2)(b_2+b_3z)+(c^2+b_2^2)b_1z_2+(b_1b_2b_3-c^2(b_1+b_2+b_3))z_3\}^2 \pmod{p},$$

wie sich durch zweimalige Anwendung der Formel

$$(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2)=(xx_1+yy_1)^2+(xy_1-yx_1)^2$$

ergiebt, so ist

$$2(\Omega_0 A_1''+(aa_0'+b_2b_3)z)$$

quadratischer Rest von p und daher die Formen ψ_2 und ψ_3 äquivalent.

Zu bemerken ist noch, dass für $p=5$ die Formen ψ jenes Geschlechts nur *eine* Klasse bilden; denn soll $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b'' \end{pmatrix}$ demselben angehören, so muss $aa_0' \equiv \pm 1$, $b_1^2-aa_0' \equiv \pm 1$ sein; daher $b_1 \equiv 0 \pmod{5}$.

Endlich lässt sich zeigen, dass die Formen ψ des Geschlechts

$$\left(\frac{\psi}{p}\right)=\left(\frac{a_0'}{p}\right), \quad \left(\frac{\Psi}{p}\right)=\left(\frac{\Omega_0}{p}\right)$$

für $p>5$ zwei oder eine Klasse repräsentiren, je nachdem die nach Artikel 20 brauchbaren r alle denselben quadratischen Charakter (mod. p) haben oder nicht. Nur der erste Theil der Behauptung bedarf noch des Beweises. Zu diesem Zweck bemerke ich, dass die Form $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b'' \end{pmatrix}$ eine Form ψ des betrachteten Geschlechts ist, wenn $aa_0'Rp$, $b''=b_1p\equiv 0 \pmod{p^2}$. Damit dieselbe der Form

$$\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b_2p \end{pmatrix}, \quad (\text{wo } b_2=b_1+b_0'\mu'', \ |\mu''|_p=0)$$

desselben Geschlechts nicht äquivalent sei, muss nach Artikel 23 sein

$$2(z-1)Np,$$

wo z Wurzel ist der Congruenz

$$(b_2^2 - aa_0')z^2 \equiv -aa_0' \quad \text{oder} \quad b_2^2 z^2 \equiv aa_0'(z^2-1) \pmod{p}.$$

Statt z aus b_2, kann man b_2 aus z berechnen und hat demnach z so zu wählen, dass $2(z-1)$ und $2(z+1)$ beide Nichtreste von p werden und z nicht durch p theilbar; oder, $z - 1 \equiv u \pmod{p}$ gesetzt: Man hat u so zu wählen, dass $2u$ und $4+2u$ Nichtreste von p werden und $2u$ nicht $\equiv -2 \pmod{p}$. Dies ist aber bekanntlich immer möglich, wenn $p > 5$ ist.

Untersuchung der Aequivalenz von Formen φ mit Formen ψ.

25. Da die Formen φ alle unter sich äquivalent sind, so genügt es, die Formen

$$\begin{pmatrix} a, & a'p^2, & 0 \\ 0, & b', & b''p \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b_1'' \end{pmatrix} \quad (a_1 = a + 2b'\lambda'', \; b_1'' = b'' + b'\mu'')$$

auf ihre Aequivalenz zu untersuchen unter der Voraussetzung, dass sie in dasselbe Geschlecht gehören. (Ist $|\Delta|_p > 0$, so kann man ausserdem $\lambda'' = \mu'' = 0$ setzen). Die Transformationsgleichungen ergeben sich aus denjenigen des Artikels 14, indem man daselbst $h = p$, $b_1'' = b''p$ macht, a_1 mit a vertauscht und b'' durch b_1'' ersetzt. Sie lauten also:

$$a = a_1\alpha^2 + a'\alpha'^2 + 2b'p\alpha''\alpha + 2b_1''\alpha\alpha', \quad \text{u. s. w.}$$

Der Coefficient γ kann nicht 0 sein; also ist

$$\gamma = k^2 r, \quad s\gamma' = rkl, \quad 2b'ps^2\gamma'' = -(a_1k^2s^2 + 2b_1''ksl + a'l^2)r,$$

$$(\beta' + p)ks = \beta l, \quad 2b'pk^2s^2\beta'' = -(a_1k^2s^2 + 2b_1''ksl + a'l^2)\beta + 2p(b_1''ks + a'l)ks,$$

$$2a'b'p^2k^2r\alpha = aa'p^2k^4r^2 - (b'\beta - b''pk^2r)^2,$$

$$a'pk^2rs\alpha' = a'pklr\alpha + s(b'\beta - b''pk^2r),$$

$$2a'b'p^2k^3s^2r\alpha'' = -(a_1k^2s^2 + 2b_1''ksl + a'l^2)a'pkr\alpha - 2(b_1''ks + a'l)s(b'\beta - b''pk^2r) + 2a'b'pks^2.$$

Die Untersuchung, unter welchen Bedingungen die Substitutionscoefficienten ganzzahlig gemacht werden können, gestaltet sich derjenigen für die Formen ψ ganz ähnlich und führt zu entsprechenden Ergebnissen. So z. B. ergeben sich für $r \pmod{q}$ Bedingungen, die sich aus denjenigen des Artikels 20 einfach dadurch ableiten, dass man in den Producten, für welche daselbst der Charakter Rq vorgeschrieben wird, überall den Factor p weglässt, so dass die jetzigen brauchbaren r (sie mögen für einen Augenblick r' heissen) zu den früheren in der Beziehung stehen, dass $r' = rp$

oder $=\frac{r}{p}$, je nachdem $|r|_p=0$ oder $=1$ ist; daher genügt (ausgenommen für $|\Omega|_p=2$, $|\Delta|_p=0$) immer die Annahme $r=-\Pi'$, wo Π' das Product aller unter sich verschiedenen Primzahlen bedeutet, welche in $2a'b'$ in ungerader Potenz aufgehen. Daraus folgt, dass jede Form φ einer Form ψ äquivalent ist, ausgenommen den im Artikel 13 und den soeben erwähnten Ausnahmefall, auf dessen Behandlung ich mich im Folgenden beschränke.

26. Ist $|\Omega|_p=2$, $|\Delta|_p=0$, also $|a'|_p=2$, $|b'|_p=1$, $|b''|_p\geqq 1$ (Art. 11), so lässt sich zeigen, dass die Form

$$\begin{pmatrix} a, & a'p^2, & 0 \\ 0, & b', & b''p \end{pmatrix} \text{ einer der Formen } \begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''_1 \end{pmatrix}$$
$$(b''_1=b''+b'\mu'',\ \mu''\equiv 0,\ 1,\ \dots\ p-1\ (\text{mod.}\,p))$$

äquivalent ist, wenn $p>5$. Hierfür reicht hin, dass die Substitutionscoefficienten ganzzahlig gemacht werden können (mod. p), wenn $r=-\Pi'$ gesetzt und μ'' passend gewählt wird.

Macht man in Bezug auf p

$$|kl|=0,\quad |s|=|r|=1,\quad \beta=p^2\beta_1,\quad b'_0\beta_1-\frac{b''}{p}k^2r_0=r_0km,\quad b''_1=b_1p,$$

so erhält man die Bedingungen

$$(b_1ks_0+a'_0l)^2\equiv(b_1^2-aa'_0)k^2s_0^2\ (\text{mod.}\,p),$$
$$(aa'_0k^2-m^2)r_0l+2b'_0s_0m\equiv 0\qquad (\text{mod.}\,p),$$
$$(ak^2s_0^2+2b_1ks_0l+a'_0l^2)(aa'_0k^2-m^2)r_0^2+4b'_0r_0s_0m(b_1ks_0+a'_0l)\equiv a'_0(2b'_0s_0)^2\ (\text{mod.}\,p^2).$$

Für die Formen φ und ψ ist bezw. $\Omega_0A'=b_0'^2$, $\Omega_0A''_1=b_1^2-aa'_0$, und da sie demselben Geschlecht angehören müssen, muss $(b_1^2-aa'_0)Rp$ sein. Es sei

$$(\alpha.)\quad z^2\equiv b_1^2-aa'_0\ (\text{mod.}\,p).$$

Dann findet man (mod. p) die Auflösung der obigen Congruenzen

$$r_0z(b_1-z)k^2\equiv\pm a'_0b'_0,\quad m\equiv\pm(b_1-z)k,\quad a'_0l\equiv-(b_1-z)ks_0$$

und daher die nothwendige (und hinreichende) Bedingung der Auflösbarkeit

$$\pm a'_0b'_0r_0z(b_1-z)Rp;$$

also, wenn $r=-\Pi'$ gesetzt wird (welche Annahme auch der Gleichung $|r|=1$ genügt):

$$\mp 2z(b_1-z)Rp.$$

Wegen des Doppelzeichens (auch von z) bleibt bloss nachzuweisen, dass für $p\equiv 1$ (mod. 4) und $(b_1-z)(b_1+z)\equiv aa'_0Rp$, μ'' so gewählt werden

kann, dass $b_1^2 - a a'_0$ und $2z(b_1 - z)$ quadratische Reste von p werden. Setzt man zu diesem Zweck

$$z(b_1 - z) \equiv u, \quad \text{also} \quad b_1 z \equiv u + b_1^2 - a a'_0 \ (\text{mod.}\, p),$$

so erhält man durch Quadriren:

$$(\beta.) \qquad (u - a a'_0)^2 + b_1^2 (2u - a a'_0) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p),$$

und wenn $|b_1|_p = 0$, sind die Congruenzen $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ immer zugleich lösbar oder nicht lösbar. Da nun b_1 zugleich mit μ'' ein vollständiges Restsystem (mod. p) durchläuft, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, u so zu bestimmen, dass $2u$ und $2u - a a'_0$ zugleich (durch p nicht theilbare) quadratische Reste von p werden. Dies ist aber bekanntlich immer möglich, wenn $p > 5$. Ist $p \equiv 1$ (mod. 8), so kann man

$$b_1 = \frac{b''}{p} + b'_0 \mu'' \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p)$$

machen.

Ist $p = 5$, $a a'_0 R 5$, so muss $b_1 \equiv 0$ (mod. 5) sein und $2z(b_1 - z)$ wird $\equiv -2z^2$ (mod. 5), also Nichtrest von 5. Haben nun alle nach Art. 25 brauchbaren r denselben quadratischen Charakter (mod. 5), nämlich denjenigen von $-\Pi'$, so ist die Erfüllung der gestellten Bedingung unmöglich. In der That sind dann die Formen $\begin{pmatrix} a, & 25a', & 0 \\ 0, & b', & 5b'' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & 5b', & b''_1 \end{pmatrix}$, wo $b''_1 \equiv 0$ (mod. 25), nicht äquivalent. Denn soll die Transformation möglich sein, so muss in Bezug auf 5 sein $|\alpha| = 0$, $|\beta| \geqq 2$, $|\gamma| = 1$, wie leicht aus den Transformationsgleichungen folgt; somit $|k| = 0$, $|r| = 1$. Ferner muss $|\gamma'| = 0$ sein; denn aus $|\gamma'| > 0$ würde folgen $|l| \geqq |s| = 0$, und γ'' wäre nicht ganzzahlig (mod. 5). Also ist $|l| = 0$, $|s| = 1$. Die oben über $|k|$, $|l|$, $|r|$, $|s|$, $|\beta|$ getroffenen Annahmen waren also nothwendig, ebenso die daraus resultirenden Bedingungen.

27. Das Gesammtresultat der Untersuchungen der Art. 13—26 über die Anzahl der Geschlechter und Klassen, in welche sich die aus der Form $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$ der Invarianten Ω, Δ abgeleiteten Formen φ und ψ der Invarianten Ω, Δp^2 vertheilen, lässt sich folgendermassen ausdrücken:

Ist $|\Delta|_p > 0$, so gehören die Formen φ und ψ zusammen in *eine* Klasse.

Ist $|\Delta|_p = 0$, $|\Omega|_p = 0$ oder $= 2$, so repräsentiren die Formen ψ zwei Geschlechter, ausgenommen, wenn $p = 3$, $B \equiv B' \equiv A'' + A' \equiv 0$ (mod. 3),

in welchem Falle sie nur *ein* Geschlecht, die Formen φ ein anderes repräsentiren.

In jedem dieser Geschlechter repräsentiren die Formen φ und ψ zusammen im Allgemeinen nur *eine* Klasse. Nur wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$, $|\Omega|_p = 2$ ist, kann das Geschlecht

$$\left(\frac{\varphi}{p}\right) = \left(\frac{\psi}{p}\right) = \left(\frac{a'_0}{p}\right), \quad \left(\frac{\Phi}{p}\right) = \left(\frac{\Psi}{p}\right) = \left(\frac{\Omega_0}{p}\right)$$

zwei Klassen von Formen φ und ψ enthalten, und zwar ist dies immer dann und nur dann der Fall, wenn die nach Art. 20 brauchbaren positiven oder negativen Theiler r von Π_1 (Art. 23) alle denselben quadratischen Charakter (mod. p) haben. Jede Form φ ist dann einer Form ψ äquivalent, ausgenommen für $p = 5$, in welchem Falle die Formen φ eine und die Formen ψ eine andere Klasse des erwähnten Geschlechts repräsentiren.

28. *Bemerkungen.* Da die Formen der Invarianten Ω, Δ, aus welchen die Formen der Invarianten Ω, Δp^2 abgeleitet werden (vergl. Art. 11) im Coefficienten a' entweder übereinstimmen oder sich doch nur um einen quadratischen Factor unterscheiden, da ferner in allen Bedingungen des Art. 20 der Coefficient b' (bezw. b'_0) gleichmässig auftritt und es daselbst nicht auf die Werthe von a und A'' selbst, sondern nur auf ihren quadratischen Charakter ankommt, da endlich die Zahl Π_1 nur von den Invarianten Ω, Δ abhängt, indem sie das Product aller unter sich und von p verschiedenen Primfactoren von $2\Omega\Delta$ ist, so erkennt man, dass alle Klassen gleichen Geschlechts der Invarianten Ω, Δ zwei Klassen des Geschlechts

$$\left(\frac{\psi}{p}\right) = \left(\frac{a'_0}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{p}\right), \quad \left(\frac{\Psi}{p}\right) = \left(\frac{\Omega_0}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Delta'\Omega''}{p}\right)$$

liefern, wenn dies bei einer von ihnen der Fall ist. Ist daher die Klassenanzahl in jedem Geschlecht der Invarianten Ω, Δ eine Potenz von 2, so gilt dies auch für die Invarianten Ω, Δp^2 (Art. 29).

Um von den Invarianten Ω, Δp^2 zu grösseren Invarianten übergehen zu können, ist zu zeigen, dass die erhaltenen Formen der Invarianten Ω, Δp^2 bloss mit Aenderung des ersten und letzten Coefficienten so transformirt werden können, dass der erste Coefficient der Form und der dritte Coefficient der primitiven Adjungirten wieder prim zu $\Omega_r \Delta_r$ werden, wenn dies nicht schon von selbst der Fall ist. Die Form $\varphi = \begin{pmatrix} a, & a'p^2, & 0 \\ 0, & b', & b''p \end{pmatrix}$ mit der primitiven Adjungirten $\begin{pmatrix} 0, & A', & A''p^2 \\ Bp, & B'p^2, & 0 \end{pmatrix}$ bedarf jedenfalls der Transformation.

Ersetzt man sie durch die ihr äquivalente [illegible] tiven Adjungirten $\begin{pmatrix} 0, & A', & A''p^2-2Bpk+A'k^2 \\ B-A'k, & B'p^2, & 0 \end{pmatrix}$, [illegible] alle Primfactoren von $\Omega_e \Delta_e$ mit Ausnahme von p, [illegible] geleistet. Für die Form $\psi = \begin{pmatrix} a+2b'\lambda'', & a', & 0 \\ 0, & b'p, & b''+b'\mu'' \end{pmatrix}$ mit der [illegible] jungirten $\Psi = \begin{pmatrix} 0, & A'p^2, & A''-2B'\lambda''-2B\mu''+A'\mu''^2 \\ (B-A'\mu'')p, & B'p, & 0 \end{pmatrix}$ [illegible] durch folgende Festsetzungen erreichen: Ist $|\Delta|_p > 0$, so setze man [illegible]. Ist $|\Delta|_p = 0$, aber $|\Omega|_p > 0$, also auch $|b'|_p > 0$, so mache man [illegible] theilbar durch alle von p verschiedenen Primfactoren von $\Omega_e \Delta_e$. Ist [illegible] $|\Omega|_p = 0$, so setze man $\lambda'' = 0$ und wähle μ'' wie vorhin. Ausgenommen [illegible] wenn $p = 3$, $aa' \equiv 1$ (mod. 3), in welchem Falle man $a'b'\lambda''$ [illegible] 2 [illegible] mache und λ'', μ'' theilbar durch alle von 3 verschiedenen Primfactoren von $\Omega_e \Delta_e$.

Sind ferner für die Form $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b'' \end{pmatrix}$ die Coefficienten a und A'' prim zu $\Omega_e \Delta_e$, so kann man sie noch in eine ihr äquivalente $\begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b', & b''+b'k \end{pmatrix}$ transformiren, in welcher $|b''+b'k| \leqq |b'|$ ist in Bezug auf jeden von 3 verschiedenen Primfactor von $\Omega_e \Delta_e$. Zu diesem Zwecke mache man k theilbar durch jeden Primfactor von $\Omega_e \Delta_e$, für welchen $|b''| \leqq |b'|$ ist, dagegen für jeden anderen Primfactor von $\Omega_e \Delta_e$ wähle man k so, dass $|b''+b'k| = |b'|$, $|A''-2Bk+A'k^2| = 0$ wird, was immer möglich ist, ausgenommen für $p = 3$, $A''+A' \equiv 0$ (mod. 3), also $|a'| = 2|b'| = |\Omega|$, $|\Delta| = 0$.

Endlich nehme ich an, dass jede Klasse durch eine Form ψ repräsentirt werde, wenn eine solche in der Klasse vorhanden ist, was für $p > 5$ immer stattfindet.

29. Um die Richtigkeit der Construction eines vollständigen Systems nicht-äquivalenter Nullformen der Invarianten Ω_e, Δ_e, wie sie in Art. 11 angegeben wurde, darzuthun, bedarf es jetzt nur noch des Nachweises, dass zwei nicht-äquivalente Formen der Invarianten Ω, Δ niemals äquivalente Formen der Invarianten Ω, Δp^2 liefern können oder, was dasselbe ist, dass, wenn zwei Formen der Invarianten Ω, Δp^2 äquivalent sind, es auch die Formen f und f_1 der Invarianten Ω, Δ sind, aus denen sie abgeleitet wurden.

Es seien also

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & 0 \\ 0, & b'h, & b'' \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} a_1, & a'h^2, & 0 \\ 0, & b', & b''_1 \end{pmatrix}, \quad h = 1 \text{ oder } 5,$$

zwei Formen der Invarianten Ω, Δ, welche ich auf die im vorigen Artikel angegebene Weise präparirt voraussetze. Der Factor $h=3$ kommt nicht in Betracht; denn er tritt (Art. 13 u. 27) nur auf beim Uebergang von $|\Omega|_3=2$, $|\Delta|_3=0$ zu $|\Omega|_3=2$, $|\Delta|_3=2$, wenn $|b''|_3>|b'|_3$, $a\equiv a'_0$ (mod. 3). Die hierbei entstehenden Formen φ gehören aber in Geschlechter, welche von denjenigen der Formen ψ verschieden sind; daher gehören auch die aus den φ abgeleiteten Formen in andere Geschlechter als die aus den ψ abgeleiteten. Es mögen nun entstehen

aus der Form f die Formen $\varphi=\begin{pmatrix}a, & a'p^2, & 0\\ 0, & b'h, & b''p\end{pmatrix}$, $\psi=\begin{pmatrix}a^*, & a', & 0\\ 0, & b'hp, & b''^*\end{pmatrix}$,

aus der Form f_1 die Formen $\varphi_1=\begin{pmatrix}a_1, & a'h^2p^2, & 0\\ 0, & b', & b''_1p\end{pmatrix}$, $\psi_1=\begin{pmatrix}a_1^*, & a'h^2, & 0\\ 0, & b'p, & b_1''^*\end{pmatrix}$,

so ist zu zeigen, dass, wenn eine der Formen φ, ψ einer der Formen φ_1, ψ_1 äquivalent ist, es auch f und f_1 sind.

I. Es sei φ äquivalent mit φ_1 und gehe in φ_1 über durch die Substitution (S)

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha', & \beta', & \gamma'\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma''\end{pmatrix};$$

dann geht f in f_1 über durch die aus drei Substitutionen zusammengesetzte

$$\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & p, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha', & \beta', & \gamma'\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{p}, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, & \frac{\beta}{p}, & \gamma\\ \alpha'p, & \beta', & \gamma'p\\ \alpha'', & \frac{\beta''}{p}, & \gamma''\end{pmatrix},$$

und der Beweis ist geleistet, wenn gezeigt wird, dass β und β'' durch p theilbar sein müssen.

Der hier betrachtete Fall kann nur auftreten, wenn

$$p=3 \text{ oder } =5,\quad |h|_p=0,\quad |\Omega|_p=2,\quad |\Delta|_p=0,\quad |a'|_p=2,\quad |b'|_p=1$$

ist, und wenn ausserdem für $p=3$:

$$|b''|>1,\quad |b''_1|>1,\quad a\equiv a_1\equiv a'_0 \text{ (mod. 3)}$$

und für $p=5$:

$$aa'_0\equiv\pm1,\quad a_1a'_0\equiv\pm1 \text{ (mod. 5)}.$$

Aus den Transformationsgleichungen

$$a_1=a\alpha^2+a'p^2\alpha''^2+2b'h\alpha''\alpha+2b''p\alpha\alpha',\quad \text{u. s. w.}$$

folgt für $\gamma=0$ auch

$$\gamma'=\beta=0,\quad \beta'=1,\quad \alpha=\gamma''=\pm1,\quad b''_1p=a'p^2\alpha'\pm b'\beta''\pm b''p,$$

und, weil $b''\equiv b''_1\equiv0$ (mod. p), auch $\beta''\equiv0$ (mod. p); w. z. b. w.

Für $\gamma \gtrless 0$ ist nach Artikel 14

$$\gamma = k^2 r, \quad s\gamma' = rkl, \quad 2b'hs^2\gamma'' = -(ak^2s^2+2b''pksl+a'p^2l^2)r,$$
$$(\beta'+h)ks = \beta l, \quad 2b'hk^2s^2\beta'' = -(ak^2s^2+2b''pksl+a'p^2l^2)\beta+2(b''pks+a'p^2l)ksh,$$
$$2a'b'h^2p^2k^2r\alpha = a_1a'h^2p^2k^4r^2-(b'\beta-b_1''pk^2r)^2,$$
$$a'hp^2k^2rs\alpha' = a'hp^2klr\alpha + s(b'\beta-b_1''pk^2r),$$
$$2a'b'h^2p^2k^3s^2r\alpha'' = -(ak^2s^2+2b''pksl+a'p^2l^2)a'hp^2kr\alpha-2(b''pks+a'p^2l)(b'\beta-b_1''pk^2r)s + 2a'b'hp^2ks^2.$$

In Bezug auf p muss sein $|\alpha| = 0$, $|\beta| > 0$, $|\gamma| > 0$.

Aus der Gleichung für α folgt, dass von den drei Zahlen

$$5+2|k|+|r|, \quad 4+4|k|+2|r|, \quad 2|b'\beta-b_1''pk^2r|$$

die beiden kleinern gleich sein müssen, somit $|r| = 1$ und

entweder $|k| = 0$, $|b'\beta-b_1''pk^2r| \geqq 3$, $|\beta| \geqq 2$, $|\beta''| > 0$, w. z. b. w.

oder $|k| > 0$, $|l| = 0$, $|s| = 2$, $|b'\beta-b_1''pk^2r| = 3+|k|$, $|\beta| = 2+|k|$.

Ist nämlich $|\gamma'| = 0$, so folgt im ersten Fall $|l| = 0$, $|s| = 1$ und hieraus $|\beta''| > 0$. Im zweiten Fall ergiebt sich aus der Gleichung für α', dass $|s| = 2$, $|k| = 1$, $|\beta| = 3$ sein muss, und die Gleichungen für α und α' geben die Congruenzen

$$2a_0'h^2k_0^2r_0\alpha+b_0'\beta_0^2 \equiv 0, \quad a_0'hk_0lr_0\alpha+b_0's_0\beta_0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

woraus

$$|l\beta_0-2hk_0s_0| > 0, \quad |\beta''| > 0.$$

Ist hingegen $|\gamma'| > 0$, also $|\gamma''| = 0$, so folgt im ersten Fall $|l|+1 > |s|$; daher $|s| = 0$, $|\beta''| > 0$. Aus der Gleichung für γ'' folgt ferner im zweiten Fall, dass von den vier Zahlen $2|s|$, $2|ks|$, $|b''ksl|+1$, $4+2|l|$ die zwei kleinsten gleich sein müssen, somit (weil $|\gamma'| = 1+|kl|-|s| > 0$) $|s| = 2$, $|l| = 0$, woraus dann wie vorhin folgt

$$|l\beta_0-2hk_0s_0| \geqq |k|, \quad |\beta''| > 0.$$

II. Die Frage nach der Aequivalenz von φ mit ψ_1 oder von ψ mit φ_1 kann nur auftreten für $p = 5$, $h = 1$. Gesetzt, es sei ψ äquivalent mit φ_1 und gehe in φ_1 über durch die Substitution (S), so geht (Art. 12) f in f_1 über durch die zusammengesetzte Substitution

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \lambda'', & \mu'', & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{p}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

deren Coefficienten ganze Zahlen werden, wenn β und β' durch p theilbar sind.

Aus den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 &= a^*\alpha^2 + a'\alpha''^2 + 2b'p\alpha''\alpha + 2b''^*\alpha\alpha',\\
a'p^2 &= a^*\beta^2 + a'\beta''^2 + 2b'p\beta''\beta + 2b''^*\beta\beta',\\
0 &= a^*\gamma^2 + a'\gamma''^2 + 2b'p\gamma''\gamma + 2b''^*\gamma\gamma',\\
b_1''p &= a^*\alpha\beta + a'\alpha'\beta' + b'p(\alpha\beta'' + \beta\alpha'') + b''^*(\alpha\beta' + \beta\alpha')
\end{aligned}$$

folgt sofort, weil auch jetzt wieder

$$|\Omega|_p = 2, \quad |\Delta|_p = 0, \quad |a'|_p = 2, \quad |b'|_p = |b''^*|_p = 1$$

ist:

$$|\alpha| = 0, \quad |\beta| > 0, \quad |\gamma| > 0$$

und aus der zweiten und vierten:

$$a^*\beta^2 + a'\beta''^2 + 2b''^*\beta\beta' \equiv 0 \pmod{p^3}, \quad a^*\beta + b''^*\beta' \equiv 0 \pmod{p^2},$$

somit

$$a'\beta''^2 + b''^*\beta\beta' \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Wäre nun $|\beta'| = 0$, so hätte man also $|\beta| = 1$ und

$$a^*\beta_0 + b_0''^*\beta' \equiv 0, \quad a_0'\beta' + b_0''^*\beta_0 \equiv 0 \pmod{p},$$

woraus

$$b_0''^*b_0''^* - a^*a_0' \equiv 0 \pmod{p},$$

gegen die Voraussetzung. Also ist $|\beta'| > 0$, w. z. b. w.

III. Sind ψ und ψ_1 äquivalent und geht ψ in ψ_1 über durch die Substitution (S), so geht f in f_1 über durch eine Substitution

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ \lambda'', & \mu'', & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ -\frac{\lambda_1''}{p}, & -\frac{\mu_1''}{p}, & \frac{1}{p} \end{pmatrix},$$

deren Coefficienten ganze Zahlen werden, wenn γ und γ' durch p theilbar sind.

Lässt man den Asterisk der Bequemlichkeit wegen fort, so lauten die Transformationsgleichungen

$$a_1 = a\alpha^2 + a'\alpha''^2 + 2b'hp\alpha''\alpha + 2b''\alpha\alpha', \quad \text{u. s. w.}$$

Ist $\gamma = 0$, so ist auch $\gamma' = 0$ und der Satz bewiesen.

Ist $\gamma \gtrless 0$, so erhält man nach Art. 14 für die Substitutionscoefficienten folgende Gleichungen:

$$\gamma = k^2 r, \quad s\gamma' = rkl, \quad 2b'hps^2\gamma'' = -(ak^2s^2+2b''ksl+a'l^2)r,$$

$$(\beta'+h)ks = \beta l, \quad 2b'hpk^2s^2\beta'' = -(ak^2s^2+2b''ksl+a'l^2)\beta+2(b''ks+a'l)hks,$$

$$2a'b'h^2pk^2r\alpha = a_1a'h^2k^4r^2-(b'p\beta-b_1''k^2r)^2,$$

$$a'hk^2rs\alpha' = a'hklr\alpha+(b'p\beta-b_1''k^2r)s,$$

$$2a'b'h^2pk^3s^2r\alpha'' = -(ak^2s^2+2b''ksl+a'l^2)a'hkr\alpha-2(b''ks+a'l)(b'p\beta-b_1''k^2r)s + 2a'b'hpks^2.$$

In Bezug auf p sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1°.) $|\Omega| = 0$, $|\Delta| \equiv 0 \pmod{2}$, also $|a'| = 0$ (nach Art. 11), $|h| = 0$.

Wäre $|\gamma| = 0$, so müsste auch $|\gamma'| = 0$ sein und umgekehrt. Daraus aber würde folgen $|klrs| = 0$ und aus den Gleichungen für γ'' und β'':

$$ak^2s^2+2b''ksl+a'l^2 \equiv 0, \quad b''ks+a'l \equiv 0 \pmod{p^{|b'|+1}},$$

woraus

$$b''^2 - aa' \equiv 0 \pmod{p};$$

gegen die Voraussetzung.

2°.) $|\Omega| = 0$, $|\Delta| \equiv 1 \pmod{2}$, also $|a'| = 1$, $|b''| = 0$, $|h| = 0$.

Die Annahme $|\gamma| = |\gamma'| = 0$ führt zu demselben Widerspruch wie vorhin, und da aus $|\gamma'| > 0$ folgt $|\gamma| > 0$, bleibt nur die Annahme zu untersuchen $|\gamma| > 0$, $|\gamma'| = 0$, woraus $|\gamma| = 1$, $|r| = |s| = 1$, $|k| = |l| = 0$, $|\beta| \geqq 1$, was zu demselben Widerspruch führt.

3°.) $|\Omega| = 1$, $|\Delta| \equiv 0 \pmod{2}$ und zwar $|\Delta| \geqq 2$, also $|a'| = |b''| = |h| = 0$ ist zu behandeln wie 1°.).

4°.) In allen übrigen Fällen ist nach Art. 11 $|a'| > 0$, $|b''| > 0$; daher $|\alpha| = 0$, $|\beta| > 0$, $|\gamma| > 0$. Es bleibt zu beweisen, dass auch $|\gamma'| > 0$ ist. Aus der Annahme, dass $|\gamma'| = 0$ sei, folgt aber $|l| = 0$, $|s| = |rk| > 0$ und aus der Gleichung für α': $|b'p\beta - b_1''k^2r| = |a'h|$, so dass aus der Gleichung für α hervorgeht, dass von den drei Zahlen

$$|b'|+1+2|k|+|r|, \quad 4|k|+2|r|, \quad |a'|$$

die beiden kleineren gleich sein müssen, wonach drei Fälle zu unterscheiden sind:

$$(1.) \quad 2|k|+|r| = |b'|+1 \leqq \tfrac{1}{2}|a'|,$$

$$(2.) \quad 2|k|+|r| = |a'|-|b'|-1 > \tfrac{1}{2}|a'|,$$

$$(3.) \quad 2|k|+|r| = \tfrac{1}{2}|a'| < |b'|+1.$$

Der Fall (2.) kann überhaupt nie eintreten; denn nach Artikel 11 kann $|a'|$ niemals $> 2|b'|+2$ werden, weil auch in den daselbst erwähnten Ausnahmefällen doch immer $|\Delta|$ gerade und $\geqq 2$ ist.

Ist $p > 5$, so zeigt die Tafel des Art. 11, dass stets $|a'| < 2|b'|+2$ ist, wesswegen dann nur der letzte Fall in Betracht kommt. Dass derselbe nicht eintreten kann, ergiebt sich wieder aus den Gleichungen für γ'' und β'', welche zu der Congruenz führen $A'' \equiv 0 \pmod{p^{\frac{1}{2}|\varDelta|+1}}$.

Ist $p=5$, $h=1$ oder 5, $|a'| = |\Omega|$ oder $|\Omega|-1$, so ergiebt sich im Falle (3.) immer wieder $A'' \equiv 0 \pmod{p}$.

Ist $p=3$ oder 5, $h=1$, $|a'| = |\Omega|+2$, so ist $2|b'| = |\Omega\varDelta|-2$, $2|b''| = |\Omega|$, $|\varDelta| \geqq 2$, was im Fall (3.) zu gebrochenem γ'' führen würde.

Endlich bleibt noch Fall (1.) zu betrachten, welcher nur zu untersuchen ist, wenn $p=3$ oder 5, $|h|_p = 0$, $|\Omega|$ gerade und $\geqq 2$, $|\varDelta|=2$, $|a'| = |\Omega|+2$, $2|b'| = 2|b''| = |\Omega|$. Dies gäbe aber einen gebrochenen Werth für γ''.

Hiermit ist der im Anfang dieses Artikels erwähnte Nachweis geleistet und der Satz bewiesen:

In jedem Geschlecht ternärer quadratischer Nullformen von ungerader Determinante ist die Klassenanzahl eine Potenz von zwei.

Nämlich diese Anzahl ist $= 2^{\nu'-\mu'+\sigma}$, wo μ', ν', σ die in den Artikeln 5 und 11 angegebene Bedeutung haben.

30. Die Berechnung von σ stützt sich auf folgende aus Artikel 27 abgeleitete Regel:

Es sei in Artikel 11 $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ und man sei, mit den Primfactoren der Form $4n+1$ von P beginnend, von den Invarianten Ω_1, $\varDelta_2\mathrm{Q}^2$ bereits übergegangen zu den Invarianten Ω_1, $\varDelta_2\mathrm{Q}^2\mathrm{P}_1^2$. Steigt man nun weiter auf zu den Invarianten Ω_1, $\varDelta_2\mathrm{Q}^2\mathrm{P}_1^2 p^2$, wo p ein Primfactor von P_2 ist, so erhält man im Allgemeinen dieselbe Anzahl von Klassen in jedem Geschlecht wie in dem entsprechenden Geschlecht der Invarianten Ω_1, $\varDelta_2\mathrm{Q}^2\mathrm{P}_1^2$; nur wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ kann eine Ausnahme stattfinden für die Geschlechter, für welche

$$\left(\frac{\psi}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Omega'\varDelta''}{p}\right), \quad \left(\frac{\Psi}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\varDelta'\Omega''}{p}\right).$$

Um hier zu entscheiden, ob die Klassenanzahl gleich bleibt oder sich verdoppelt, bilde man sämmtliche (positive) Theiler r' von $2\Theta'\Omega'\varDelta'\Omega''\varDelta''$, für welche in Bezug auf jeden Primfactor der Form $4n+1$ von $\varDelta'$

$2\Omega''\varDelta''r'$ oder, wenn r' durch diesen Primfactor theilbar ist, $2\Theta'\varDelta'_0\varDelta''A''r'_0$,

ebenso in Bezug auf jeden Primfactor der Form $4n+1$ von $\Theta'\Omega'$

$$2\Omega''\varDelta''r' \quad \text{oder} \quad 2\Theta'_0\Omega'_0\Omega''ar'_0,$$

endlich in Bezug auf jeden Primfactor (der Form $4n+1$) von P_1

$2\Omega''\Delta''r'$ oder $2\Theta'\Omega'\Omega''ar'$ oder $2\Theta'\Delta'\Delta''A''r'$ oder $2\Omega'\Delta'aA''r'$

quadratischer Rest ist, wo die quadratischen Charaktere von a und A'' übereinstimmen mit denjenigen von ψ und Ψ. Je nachdem alle diese r' denselben quadratischen Charakter (mod. p) haben oder nicht, verdoppelt sich die Klassenanzahl oder bleibt unverändert.

Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Man bilde sämmtliche Theiler r von $2\Theta'\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''$ (1 incl.), für welche in Bezug auf jeden Primfactor der Form $4n+1$

von $\Delta' : r$ oder, wenn r durch diesen Primfactor theilbar ist, $\Theta'\Delta'_0\Omega''A''r_0$,
von $\Theta'\Omega' : r$ oder, wenn r durch diesen Primfactor theilbar ist, $\Theta'_0\Omega'_0\Delta''ar_0$,
von $P_1 : r$ oder $\Theta'\Delta'\Omega''A''r$ oder $\Theta'\Omega'\Delta''ar$

quadratischer Rest ist. Je nachdem alle diese Theiler r quadratische Reste von p sind oder nicht, findet Verdoppelung der Klassenanzahl statt oder nicht.

Hieraus ergiebt sich zur Berechnung der Zahl σ für ein gegebenes Nullgeschlecht der Invarianten Ω_e, Δ_e oder, was dasselbe ist, der Invarianten Ω_1, Δ_1 (Art. 11) die Regel:

Es seien

$p_1, p_2, \ldots p_m$ diejenigen Primfactoren der Form $4n+1$ von P, für welche $\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{p}\right)$, $\left(\frac{F}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Delta'\Omega''}{p}\right)$ ist,

$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{\nu'}$ die sämmtlichen Primfactoren der Form $4n+1$ von $\Theta = \Theta'\Omega'\Delta'$,

s eine relative Primzahl zu Θ, für welche $\left(\frac{s}{\theta_k}\right) = \left(\frac{\Delta'\Omega''}{\theta_k}\right)\left(\frac{f}{\theta_k}\right)$ oder $= \left(\frac{\Omega'\Delta''}{\theta_k}\right)\left(\frac{F}{\theta_k}\right)$, $(k = 1, 2, \ldots \nu')$, je nachdem θ_k Theiler ist von $\Theta'\Omega'$ oder von Δ',

r ein (positiver) Theiler von $2\Theta\Omega''\Delta''$ *),

r' ein solcher Theiler r, für welchen $\left(\frac{r}{\theta_k}\right) = 1$ oder, wenn r durch θ_k theilbar, $\left(\frac{\theta_k^{-2}\Theta\Omega''\Delta''sr}{\theta_k}\right) = 1$, $(k = 1, 2, \ldots \nu')$,

r'' ein solcher Theiler r', für welchen $\left(\frac{r'}{p_k}\right) = 1$, $(k = 1, 2, \ldots m)$.

Dann bilden sämmtliche Theiler r' eine Gruppe (wenn man das Product zweier durch das grösste darin aufgehende Quadrat dividirt, erhält man

*) Die Zahl r im ersten Theil hat eine andere Bedeutung und wird hier durch s vertreten.

wieder ein r'), ebenso sämmtliche Theiler r'' (incl. 1), und es ist

$$2^{\sigma} = 2^{m} \cdot \frac{\text{Anzahl aller } r''}{\text{Anzahl aller } r'}.$$

Ist 2^{n} die Anzahl der unter einander verschiedenen im System der Gesammtcharaktere $\left(\frac{r'}{p_1}\right)$, $\left(\frac{r'}{p_2}\right)$, ... $\left(\frac{r'}{p_m}\right)$ aller Theiler r', so ist $\sigma = m - n$.

Aus Art. 5 folgt aber, dass $2^{\nu'-\mu'} = 2^{\nu'} \cdot \frac{\text{Anzahl aller } r'}{\text{Anzahl aller } r}$ *); somit gilt der Satz:

Die Klassenanzahl eines ternären Nullgeschlechts von ungerader Determinante ist gleich

$$2^{\nu'+m} \cdot \frac{\text{Anzahl aller } r''}{\text{Anzahl aller } r}.$$

Beispiel: Jedes Geschlecht von ternären quadratischen Nullformen, deren Invarianten Potenzen einer und derselben ungeraden Primzahl p sind, enthält nur *eine* Klasse, ausgenommen, wenn $p \equiv 1 \pmod{8}$ ist, das Geschlecht: $\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right) = 1$, welches zwei Klassen enthält.

Denn die Geschlechter der Invarianten $(1, p)$, $(p, 1)$, $(1, p^2)$, $(p^2, 1)$ enthalten nur *eine* Klasse, ebenso die Nullgeschlechter der Invarianten (p, p), (p, p^2), (p^2, p), ausgenommen den erwähnten Fall, in welchem nämlich $\nu' = 1$, $\mu' = 0$ ist. Ferner ist für die Invarianten $\Omega_1 = p^2$, $\Delta_1 = p^2$ nach Art. 11: $\mathrm{P} = p$, $\Theta\Omega''\Delta'' = 1$, also $\mu' = \nu' = 0$, $m = 1$, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ und zugleich $\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right) = 1$, sonst $= 0$; im ersten Fall $n = 0$ oder 1, je nachdem $p \equiv 1$ oder $5 \pmod{8}$.

---

*) Ist τ die Anzahl aller Primfactoren von $2\Theta\Omega''\Delta''$, so ist $2^{\tau-1}$ die Anzahl aller Formen $(a, 0, rc)$ und 2^{τ} die Anzahl der gleichen oder verschiedenen Gesammtcharaktere in Σ_1 und Σ_2 zusammen. Giebt es in Σ_1 und Σ_2 im Ganzen 2^{ϱ} Gesammtcharaktere, deren einzelne auf die ν' Primzahlen θ_k bezügliche Charaktere sämmtlich positiv sind, so ist $\varrho + \mu' = \tau$, $2^{\nu'-\mu'} = 2^{\nu'+\varrho-\tau}$.

Zürich, Januar 1883.

Ueber Supplementintegrale.

(Von Herrn *W. Heymann* in Dresden.)

In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, dass die Integration von linearen ***nicht reducirten*** Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad p_n y^{(n)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = q$$

nicht selten ohne Anwendung der Variation der Constanten geleistet werden kann. Ist Y das vollständige Integral der reducirten Gleichung, so lautet das complete Integral der nicht reducirten

$$y = Y + \zeta,$$

wo ζ eine von willkürlichen Constanten freie particuläre Lösung der Differentialgleichung mit zweitem Theil bedeutet. Indem wir es dahingestellt sein lassen, ob sich Y angeben lässt oder nicht, versuchen wir nun für gewisse Klassen von Differentialgleichungen eine directe Herleitung von ζ. Der Kürze halber möge die Function ζ *das zu q gehörige Supplementintegral* der vorgelegten Differentialgleichung heissen; weiter wollen wir annehmen, dass die Functionen p_k *ganze* Functionen seien, während wir über q erst im gegebenen Falle besondere Voraussetzungen machen.

Bestimmte Vorschriften für die Herleitung des Supplementintegrales lassen sich — da wir die Kenntniss der Particularlösungen der reducirten Gleichung nicht voraussetzen — im Allgemeinen nicht geben. Sehr oft führt eine hypothetische Annahme über die Gestalt des Integrales zum Ziele, oder es gelingt, die Methode, welche bei der Integration der reducirten Gleichung in Anwendung kommt, so zu modificiren, resp. zu erweitern, dass sogleich ein particuläres Integral für die nicht reducirte Gleichung gewonnen wird.

Lässt sich q als eine Summe von Functionen ausdrücken

$$q = q_1 + q_2 + \cdots,$$

so ist es bisweilen zweckmässig, die Supplementintegrale ζ_1, ζ_2, ... einzeln

aufzusuchen, welche der Reihe nach zu q_1, q_2, ... gehören; ihre Summe bildet das zu q gehörige Supplementintegral. Ist beispielsweise q eine unecht gebrochene Function, so werden wir dieselbe in bekannter Weise zerlegen, und wir haben dann die Supplementintegrale für eine ganze Function und für eine Anzahl von Partialbrüchen zu bilden.

Wir wenden uns zunächst zu Differentialgleichungen, deren zweiter Theil eine *ganze* Function ist.

$$q = A_0 + A_1 x + \cdots + A_\mu x^\mu$$

und unterscheiden — was wesentlich ist — ob die Gradzahl der Coefficienten p_n bis p_0 in Gleichung (1.) die Ordnungszahl der mit ihnen multiplicirten Ableitungen $y^{(n)}$ bis y übersteigt oder nicht.

Der *zweite* Fall ist der einfachere, denn dann ist unmittelbar klar, dass das Supplementintegral im Allgemeinen eine ganze Function μ^{ten} Grades

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\mu x^\mu$$

sein wird, deren Coefficienten sich durch Vergleichung ergeben.

Eine so einfache Herleitung des Supplementintegrales ist beispielsweise möglich für die linearen Gleichungen mit constanten Coefficienten, für die Gleichung

$$\sum_n^0 (a+bx)^k y^{(k)} = q$$

und für die Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen.

Gleich einfach gestaltet sich die Sache, wenn der Grad der Coefficienten p_k bis p_0 die Ordnung der mit ihnen multiplicirten Differentialquotienten nicht übersteigt und zugleich der Grad μ von q nicht grösser als die Ordnungszahl k ist. Auf die Beschaffenheit der Coefficienten p_{k+1} bis p_n kommt dann nichts an, und das Supplementintegral lautet

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k.$$

Der *erste* Fall lässt sich nicht so leicht erledigen. Uebersteigen die Gradzahlen der Coefficienten p_n bis p_0 die Ordnungszahlen der mit ihnen multiplicirten Ableitungen im Maximum um die Zahl m, so setzen wir das Supplementintegral in der Form

$$\zeta = z + \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{\mu-m} x^{\mu-m}$$

voraus und führen diesen Ausdruck an Stelle von y in die Gleichung (1.)

ein. Es entsteht

$$p_n z^{(n)} + \cdots + p_0 z + s = q,$$

und hierin ist s eine ganze Function μ^{ten} Grades, welche die unbestimmten Coefficienten α_k linear enthält. — Hierbei muss jedoch vorausgesetzt werden, dass der Grad μ von q nicht kleiner ist als der Grad von p_k, wo p_k den graduell kleinsten Coefficienten unter denjenigen bedeutet, deren Gradzahl die entsprechende Ordnungszahl um m übertrifft. Denn wäre μ kleiner als der Grad $k+m$ von p_k, mithin $k > \mu - m$, so würde die k^{te} und alle höheren Ableitungen von

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{\mu-m} x^{\mu-m}$$

verschwinden und s in Folge dessen nicht bis zum μ^{ten} Grade aufsteigen. — Die $\mu - m + 1$ Coefficienten α bestimme man — wenn möglich — so, dass die $\mu - m + 1$ höchsten Potenzen der Function $q - s$ fortfallen. Es bleibt dann eine Gleichung

$$(2.) \qquad p_n z^{(n)} + \cdots + p_0 z = r$$

zurück, in welcher der Grad der rechten Seite auf den $(m-1)^{\text{ten}}$ herabgesunken ist, und für welche ein Supplementintegral auf anderem Wege aufzusuchen ist, wie dies sogleich gezeigt werden soll.

A.) Es sei vorgelegt die *Riccati*sche Gleichung

$$(1^a.) \qquad y^{(n)} + a x^m y = \sum_0^\mu A_k \frac{x^k}{k!}.$$

Wir setzen, falls $\mu \geqq m$,

$$y = z + \sum_0^{\mu-m} \alpha_k \frac{x^k}{k!}$$

und erhalten

$$(2^a.) \qquad z^{(n)} + a x^m z = \sum_0^{m-1} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Der Gleichung (2^a.) genügt, wenn sie reducirt ist, nach *Kummer* folgendes m-fache Integral *)

$$(3^a.) \quad z = {}_m\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{m+n} + \cdots + u_m^{m+n}}{m+n}} u_1^{m-1} u_2^{m-2} \ldots u_{m-2}^2 u_{m-1} . S . du_1 \ldots du_m,$$

worin

$$S = \sum_{i=1}^{m+n} C_i e^{\varepsilon_i u_1 \ldots u_m x}, \quad \varepsilon^{m+n} + a = 0,$$

*) Siehe dieses Journal, XIX. Band.

und wo die m überflüssigen Constanten an nachstehende m lineare Bedingungsgleichungen gebunden sind:

$$[z^{(n+k)}]_{x=0} = 0, \qquad (k = 0, 1, \dots m-1).$$

Das *Kummer*sche Integral genügt aber offenbar auch der ***nicht reducirten*** Gleichung (2^a.), wenn an Stelle der letzten Bedingungsgleichungen die andern:

$$[z^{(n+k)}]_{x=0} = B_k, \qquad (k = 0, 1, \dots m-1)$$

gesetzt werden. Mit Benutzung des Integralausdruckes (3^a.) können wir hierfür auch schreiben

$$\vartheta(k).\sum_{i=1}^{m+n} C_i \varepsilon_i^{n+k} = B_k,$$

unter $\vartheta(k)$ das Integral

$$_m\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^{m+n}+\cdots+u_m^{m+n}}{m+n}} u_1^{n+k+m-1} u_2^{n+k+m-2} \dots u_m^{n+k} du_1 \dots du_m$$

verstanden. Dasselbe lässt sich durch Gammafunctionen ausdrücken; es ist

$$\vartheta(k) = (m+n)^\omega \Gamma\Big(\frac{n+k+1}{m+n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n+k+2}{m+n}\Big)\dots\Gamma\Big(\frac{n+k+m}{m+n}\Big),$$

$$\omega = \frac{m(2k-m+1)}{2(m+n)} \qquad (k = 0, 1, \dots m-1).$$

B.) In der Gleichung

$$(1^b.) \qquad p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = q$$

mögen die Functionen p_2, p_1, p_0 und q der Reihe nach den Grad 3, 2, 1 und μ haben. Dann ist das complete Integral additiv aus einer ganzen Function $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades und einer Function z zusammengesetzt, welche letztere der Gleichung

$$(2^b.) \qquad p_2 z'' + p_1 z' + p_0 z = \varkappa$$

zu genügen hat, in der $\varkappa$ eine bestimmte Constante bedeutet.

Die Gleichung (2^b.) lässt sich durch hypergeometrische Functionen integriren, wenn die Coefficienten folgendermassen lauten *).

$$p_2 = x_1 x_2 x_3, \quad p_1 = (b_2+b_3)x_2x_3 + (b_3+b_1)x_3x_1 + (b_1+b_2)x_1x_2,$$
$$p_0 = -\lambda(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3),$$

wobei

$$x_k = x - a_k \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \lambda - 1 = 0.$$

*) Siehe Zeitschrift für Math. u. Phys., XXIX. Jahrg.

Denn führt man in jene Gleichung den Ausdruck

$$(3^b.)\qquad z = \sum_1^3 C_k \int_{a_k}^{\infty} u_1^{b_1-1} u_2^{b_2-1} u_3^{b_3-1} (u-x)^\lambda du \qquad (u_k = u - a_k,\ b_k > 0)$$

ein, so entsteht

$$\lambda \sum_1^3 [C_k u_1^{b_1} u_2^{b_2} u_3^{b_3} (u-x)^{\lambda-1}]_{a_k}^x = \varkappa,$$

d. h.

$$C_1 + C_2 + C_3 = \varkappa : \lambda,$$

und diese Bedingungsgleichung beschränkt die Lösung nicht, weil eine der willkürlichen Constanten überflüssig war.

C.) Die *Laplace*sche Gleichung

$$(1^c.)\qquad \sum_n^0 (a_k + b_k x) y^{(k)} = q.$$

Ist q vom μ^{ten} Grade, so besteht das Supplementintegral aus einer ganzen Function $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades, zu welcher additiv das Supplementintegral der Gleichung

$$(2^c.)\qquad \sum_n^0 (a_k + b_k x) z^{(k)} = \varkappa$$

hinzukommt, unter $\varkappa$ eine bestimmte Constante verstanden.

Wir setzen voraus, das Supplementintegral habe dieselbe Form wie ein particuläres Integral der reducirten Gleichung, also

$$(3^c.)\qquad \zeta = \lambda \int_{u_1}^{u_2} e^{u(m+x)} (u-\alpha_1)^{\beta_1-1} \dots (u-\alpha_n)^{\beta_n-1} du,$$

wo λ eine Constante bezeichnet und m, α_k und β_k durch die Partialbruchzerlegung

$$\frac{a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0}{b_n u^n + \dots + b_1 u + b_0} = m + \sum_1^n \frac{\beta_k}{u - \alpha_k}$$

bestimmt sind.

Führen wir den Ausdruck $(3^c.)$ statt z in die Gleichung $(2^c.)$ ein, so entsteht

$$b_n \lambda [e^{u(m+x)} (u-\alpha_1)^{\beta_1} \dots (u-\alpha_n)^{\beta_n}]_{u_1}^{u_2} = \varkappa,$$

und wählen wir $u_1 = 0$, $u_2 = \alpha_k$, so ergiebt sich, falls $\beta_k > 0$, $b_n > 0$,

$$\lambda = (-1)^{\beta+1} \alpha_1^{-\beta_1} \alpha_2^{-\beta_2} \dots \alpha_n^{-\beta_n} \varkappa : b_n, \qquad \beta = \sum_1^n \beta_i.$$

Für die aufgestellten Grenzen ist nun $(3^c.)$ das gesuchte Supplementintegral vorausgesetzt, dass α_k kleiner ist als alle diejenigen α, denen ein $\beta \leqq 0$ als Exponent zukommt.

D.) Ist die allgemeinere Gleichung

$$(1^d.)\qquad \sum_n^0 (a_k + b_k x + c_k x^2)\, y^{(k)} = q$$

vorgelegt, so besteht das Supplementintegral, falls q vom μ^{ten} Grade ist, aus einer ganzen Function $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Grades, zu welcher additiv das Supplementintegral der Gleichung

$$(2^d.)\qquad \sum_n^0 (a_k + b_k x + c_k x^2)\, z^{(k)} = \varkappa_0 + \varkappa_1 x$$

hinzuzufügen ist.

Wäre die Gleichung $(2^d.)$ reducirt, so würde ihr der Ausdruck

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du}\, \frac{W}{U_2}\, du$$

genügen, wobei

$$U_0 = \sum_n^0 a_k u^k,\quad U_1 = \sum_n^0 b_k u^k,\quad U_2 = \sum_n^0 c_k u^k$$

und W das Integral der Gleichung

$$U_2 W'' + U_1 W' + U_0 W = 0$$

bedeutet. Denn wird der Ausdruck für z in die Differentialgleichung $(2^d.)$ eingeführt, so entsteht auf der linken Seite

$$\left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du}(xW - W')\right]_{u_1}^{u_2},$$

und das kann unter bestimmten Voraussetzungen durch geeignete Wahl der Grenzen annullirt werden.

Soll die nicht reducirte Gleichung $(2^d.)$ integrirt werden, so haben wir nur zu verlangen, dass der zuletzt aufgeschriebene Ausdruck identisch werde mit $\varkappa_0 + \varkappa_1 x$, d. h., dass

$$\left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} W'\right]_{u_1}^{u_2} = -\varkappa_0,\quad \left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} W\right]_{u_1}^{u_2} = \varkappa_1.$$

Wählen wir $u_1 = 0$ und, wenn möglich, u_2 so, dass die linken Seiten dieser Gleichungen verschwinden; berücksichtigen wir auch, dass W die Gestalt

$$W = \mathfrak{S}_1 f_1(u) + \mathfrak{S}_2 f_2(u)$$

besitzt, so gelangen wir zu folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 f_1'(u) + \mathfrak{S}_2 f_2'(u) &= \varkappa_0 e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du} \\ \mathfrak{S}_1 f_1(u) + \mathfrak{S}_2 f_2(u) &= -\varkappa_1 e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du} \end{aligned}\right\}\quad (u = 0).$$

Dieselben lassen sich mit Hülfe der willkürlichen Constanten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ befriedigen, und zwar ergiebt sich

$$\mathfrak{S}_1 = (\varkappa_0 f_2(0) + \varkappa_1 f_2'(0)) : \varrho, \quad \mathfrak{S}_2 = -(\varkappa_0 f_1(0) + \varkappa_1 f_1'(0)) : \varrho,$$

wo ϱ eine Constante vorstellt, die durch die *Abel*sche Formel

$$f_1'(u) f_2(u) - f_2'(u) f_1(u) = \varrho e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du}$$

bestimmt ist. Bezüglich der Wahl von u_2 ist zu beachten, dass

$$e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} = e^{u(m+x)} (u-\alpha_1)^{\beta_1} \dots (u-\alpha_n)^{\beta_n}$$

ein Ausdruck ist, welcher für $u = \alpha_k$ verschwindet, wenn β_k, respective dessen reeller Theil positiv ist. Das Supplementintegral der Gleichung (2^d.) lautet sonach

$$(3^d.) \quad \zeta = \frac{1}{c_n} \int_0^{\alpha_k} e^{u(m+x)} (u-\alpha_1)^{\beta_1 - 1} \dots (u-\alpha_n)^{\beta_n - 1} \{\mathfrak{S}_1 f_1(u) + \mathfrak{S}_2 f_2(u)\} du,$$

vorausgesetzt, dass dieser Ausdruck für die ermittelten Grenzen einen Sinn hat.

Eine Differentialgleichung, für welche die Rechnung ohne Schwierigkeit durchgeführt werden kann, weil insbesondere W leicht zu ermitteln ist, würde folgende sein

$$a_2 z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) z = \varkappa_0 + \varkappa_1 x.$$

Es erübrigt, auch eine Bemerkung zu nicht reducirten simultanen Gleichungen zu machen.

Vorgelegt sei ein System von n linearen nicht reducirten simultanen Gleichungen beliebiger Ordnung; die Coefficienten mögen ganze Functionen sein, desgleichen die rechten Seiten q_1 bis q_n.

Uebersteigen die Gradzahlen der Coefficienten nicht die Ordnungszahlen der mit ihnen multiplicirten Ableitungen, so sind sämmtliche n Supplementintegrale ζ_1 bis ζ_n ganze Functionen, und ihr Grad ist im Allgemeinen gleich dem des graduell grössten q. Das complete Integralsystem lautet

$$y_k = z_k + \zeta_k \qquad (k = 1, 2, \dots n),$$

unter z_k die Integrale der reducirten Gleichungen verstanden. Beispiele hierzu liefern die linearen Gleichungen mit constanten Coefficienten.

Uebersteigen die Gradzahlen der Coefficienten die Ordnungszahlen der zugehörigen Ableitungen, so setzen sich die Supplementintegrale ζ_k im

Allgemeinen additiv aus ganzen Functionen und gewissen anderen Functionen zusammen, welche letztere Supplementintegrale eines Systems sind, das sich von dem ursprünglichen nur in den rechten Seiten unterscheidet. Aber die neuen rechten Seiten enthalten linear die Coefficienten der zu den Supplementintegralen ζ_k gehörigen ganzen Functionen, und über diese Coefficienten werden wir im Allgemeinen so verfügen können, dass der Grad jener Seiten herabgedrückt wird.

Wir wenden uns schliesslich zur Ableitung des Supplementintegrales, wenn die rechte Seite q der vorgelegten Differentialgleichung irgend welche Function bedeutet, und betrachten im Speciellen

A.) die Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung,

B.) die *Laplace*sche Gleichung.

A.) Supplementintegral von

$$\varphi(x)y^{(n)}+\sum_{k=n-1}^{k=0}(-1)^{n-k}\left[\binom{\lambda-k-1}{n-k}\varphi^{(n-k)}(x)+\binom{\lambda-k-1}{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)\right]y^{(k)} = q.$$

In dieser Differentialgleichung *) bedeuten

$$\varphi(x) = \prod_1^n(x-a_k),\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sum_1^n\frac{b_k}{x-a_k}.$$

Es führen zwei Wege zum Ziele:

1.) Wir setzen das Supplementintegral in der Gestalt

$$\zeta = \int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-1}U\,du$$

voraus und erhalten nach Einführung desselben

$$\left|(u-x)^{\lambda-n}U\varphi(u)\right|_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-n}\left\{\frac{d}{du}[U\varphi(u)]-U\psi(u)\right\}du = q:\varrho,$$

wo ϱ eine constante Zahl ist, die in q eingehen möge.

Lassen sich die Grenzen u_1 und u_2 so bestimmen, dass

$$\left|(u-x)^{\lambda-n}U\varphi(u)\right|_{u_1}^{u_2} = 0,$$

wobei U aus der Differentialgleichung

$$\frac{d}{du}[U\varphi(u)]-U\psi(u) = F(u)$$

*) Ueber die reducirte Gleichung vergl. die Arbeit von Hrn. ***Pochhammer*** im 71. Bande dieses Journals.

folgt und $F(u)$ durch die Functionalgleichung

$$-\int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-n}F(u)\,du = q$$

gegeben ist, so haben wir die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt. Das Supplementintegral lautet dann

$$(a.)\quad \zeta = \int_{u_1}^{u_2}\left\{(u-x)^{\lambda-1}\chi(u)\int_{u_0}^{u}\vartheta(u)\,F(u)\,du\right\}du,$$

worin

$$\chi(u) = \prod_1^n (u-a_k)^{b_k-1},\quad \vartheta(u) = \prod_1^n (u-a_k)^{-b_k}$$

und u_0 eine Grenze ist, für welche das Integral verschwindet.

2.) Wir setzen ζ in Form eines Doppelintegrales

$$\zeta = \int_{u_1}^{u_2}\left[S(u)\int_{u_0}^{u}(u-x)^{\lambda-1}U\,du\right]du$$

voraus; dann entsteht, wie sich unmittelbar aus der vorigen Entwickelung ablesen lässt,

$$\int_{u_1}^{u_2}S(u)\left[\left|(u-x)^{\lambda-n}U\varphi(u)\right|_{u_0}^{u}-\int_{u_0}^{u}(u-x)^{\lambda-n}\left\{\frac{d}{du}[U\varphi(u)]-U\psi(u)\right\}du\right]du = q:\varrho.$$

Bestimmen wir U so, dass

$$\frac{d}{du}[U\varphi(u)]-U\psi(u) = 0,$$

und u_0 so, dass

$$\left|(u-x)^{\lambda-n}U\varphi(u)\right|_{u_0} = 0,$$

dann bleibt zurück

$$\int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-n}S(u)\,U\varphi(u)\,du = q.$$

Setzen wir endlich

$$S(u)\,U\varphi(u) = F(u),$$

so wird $F(u)$, abgesehen vom Vorzeichen, die frühere Bedeutung haben, und es wird sonach $S(u)$ bekannt sein. Nun lautet das Supplementintegral

$$(b.)\quad \zeta = \int_{u_1}^{u_2}\left[\vartheta(u)\,F(u)\int_{u_0}^{u}(u-x)^{\lambda-1}\chi(u)\,du\right]du,$$

und hierin bedeuten ϑ und χ die früher angegebenen Producte.

B.) Supplementintegral von

$$\sum_n^0 (a_k+b_k x)\,y^{(k)} = q.$$

Auch hier kann das Supplementintegral auf doppeltem Wege abgeleitet werden, und der Vorgang ist analog wie bei der vorigen Untersuchung.

Die beiden Formen, in denen wir das Supplementintegral voraussetzen, sind

$$\zeta = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du \quad \text{respect.} \quad \zeta = \int_{u_1}^{u_2} \left[S(u) \int_{u_0}^{u} e^{ux} V du \right] du,$$

und es ergiebt sich dem entsprechend

$$(a.) \qquad \zeta = \int_{u_1}^{u_2} \left\{ e^{u(m+x)} \chi(u) \int_{u_0}^{u} \vartheta(u) F(u) du \right\} du,$$

respect.

$$(b.) \qquad \zeta = \int_{u_1}^{u_2} \left[\vartheta(u) F(u) \int_{u_0}^{u} e^{u(m+x)} \chi(u) du \right] du.$$

Hierin bedeuten

$$\chi(u) = \prod_1^n (u-\alpha_k)^{\beta_k - 1}, \quad \vartheta(u) = \prod_1^n (u-\alpha_k)^{-\beta_k},$$

und m, α_k und β_k sind durch

$$\frac{a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0}{b_n u^n + \cdots + b_1 u + b_0} = m + \sum_1^n \frac{\beta_k}{u - \alpha_k}$$

gegeben. Die Grenzen u_1 und u_2, sowie die Function $F(u)$ sind, von einem constanten Factor abgesehen, durch die Functionalgleichung

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u) du = q$$

bestimmt.

Plauen i. V., März 1884.

Ueber eine Transformation bei linearen simultanen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *W. Heymann* in Dresden.)

Ein System von Differentialgleichungen

$$(1.)\quad F.y_i' + \sum_k f_{ik} y_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

in welchem die f_{ik} und F ganze Functionen von x bedeuten, kann im Allgemeinen so transformirt werden, dass jede Gleichung durch einen linearen Factor $(x-\varepsilon_i)$ theilbar wird. — Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass F mindestens n von einander verschiedene lineare Factoren besitzt, dass also

$$F = f.(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_n),$$

wo f eine Constante oder eine ganze Function vorstellt.

Um die Transformation vorzunehmen, führe man in das System (1.) die linearen Substitutionen

$$(2.)\quad y_i = \sum_k a_{ik} z_k$$

ein; dann entsteht

$$(3.)\quad F.\Sigma a_{ik} z_k' + \Sigma f_{ik} y_k = 0.$$

Bestimmt man hieraus die Ableitungen z_1' bis z_n', so erhält man n Gleichungen

$$(4.)\quad D.F.z_i' + A_{1i}\sum_1^n f_{1k}y_k + A_{2i}\sum_1^n f_{2k}y_k + \cdots + A_{ni}\sum_1^n f_{nk}y_k = 0,$$

in denen

$$D = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

und A_{ji} die Adjuncte von a_{ji} ist.

Ordnet man in den Gleichungen (4.) nach den Variabeln y_1 bis y_n, so entsteht

$$(5.)\quad D.F.z_i' + y_1\sum_j A_{ji}f_{j1} + y_2\sum_j A_{ji}f_{j2} + \cdots + y_n\sum_j A_{ji}f_{jn} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots n).$$

Wenn man nun verlangt, dass die erste dieser Gleichungen durch $x-\varepsilon_1$,

die zweite durch $x-\varepsilon_2$, die i^{te} durch $x-\varepsilon_i$ u. s. f. theilbar sei, so ergeben sich n Systeme von je n Bedingungsgleichungen, von denen das i^{te} System folgendermassen lautet

$$[\sum_j A_{ji}f_{j1}]_{x=\varepsilon_i} = 0, \quad [\sum_j A_{ji}f_{j2}]_{x=\varepsilon_i} = 0, \quad \dots \quad [\sum_j A_{ji}f_{jn}]_{x=\varepsilon_i} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der n^2 Subdeterminanten A_{11} bis A_{nn} bestimmen, vorausgesetzt, dass die Determinante

$$V = |f_{ik}| \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \dots\ n)$$

für $x=\varepsilon_i$, $i=1,\ 2,\ \dots\ n$ verschwindet. — Man kann aber, wie sogleich gezeigt werden soll, das System (1.) von vornherein so transformiren, dass diese Voraussetzung stattfindet.

Hat man nun für A_{11} bis A_{nn} die entsprechenden proportionalen Ausdrücke berechnet, so gewinnt man auch für die Elemente a_{ik} proportionale Ausdrücke, indem man von dem Determinantensatze Gebrauch macht:

$$a_{ik} = A'_{ik} : D^{n-2},$$

unter A'_{ik} die Adjuncte von A_{ik} in Bezug auf das System $\Sigma \pm A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$ verstanden.

Um es endlich zu erreichen, dass für das System (1.) die Bedingungen

$$V(\varepsilon_i) = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \dots\ n)$$

erfüllt sind, setze man, bevor die linearen Substitutionen verwendet werden,

$$(6.) \qquad y_k = e^{\int \frac{G}{F}dx}.\eta_k,$$

wo G eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$G = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_{n-1}x^{n-1}$$

bedeutet *). Das System (1.) geht über in

$$(1^a.) \qquad F.\eta'_k + f_{k1}\eta_1 + f_{k2}\eta_2 + \dots + f_{kk}.(G+\eta_{kk}) + \dots + f_{kn}\eta_n = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \dots\ n),$$

und in diesem ist

$$V = |G\delta_{ik} + f_{ik}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\ k=1,\ 2,\ \dots\ n \\ \delta_{ik}=0 \text{ für } i \gtrless k;\ \delta_{kk}=1 \end{smallmatrix}\right).$$

Berechnet man jetzt aus der Gleichung

$$V(\varepsilon_i) = 0,$$

einen Werth für $G(\varepsilon_i)$, so hat man zufolge der Bedeutung dieser Grösse n lineare Gleichungen von der Form

---

*) Ueber diese Transformation vergl. die Abhandl. des Verfassers in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXVII. Jahrg., 6. Heft.

$$(7.)\qquad g_0+g_1\varepsilon_i+g_2\varepsilon_i^2+\cdots+g_{n-1}\varepsilon_i^{n-1} = G(\varepsilon_i),$$

aus denen die Coefficienten g_0 bis g_{n-1} gefunden werden können. — Wesentliche Voraussetzung ist hierbei, dass sämmtliche Werthe ε_i von einander verschieden sind.

Da die Gleichung $V(\varepsilon_i) = 0$ im Allgemeinen n Werthe für $G(\varepsilon_i)$ liefert, und jedes dieser G die rechte Seite von jeder der Gleichungen (7.) sein kann, so darf man eben diese Seiten — indem man alle Werthe von G in Rechnung zieht, den Index von ε aber ungeändert lässt — variiren und zwar in der n^{ten} Klasse mit Wiederholung. Da bei einer solchen Variation n^n verschiedene Formen möglich sind, so giebt es n^n Gleichungssysteme (7.), die sich in den rechten Seiten unterscheiden; es giebt daher auch n^n verschiedene Substitutionen der Form

$$y_k = e^{\int\frac{G}{F}dx}.\eta_k,$$

die das ursprüngliche System simultaner Differentialgleichungen in ein solches überführen, dessen Coefficientendeterminante V für n vorgeschriebene Werthe von x verschwindet.

Wendet man die angeführte Transformation auf die Gleichungen

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{dy_1}{dx}+(a_1+b_1x)y_1+(c_1+d_1x)y_2 = 0,$$

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{dy_2}{dx}+(a_2+b_2x)y_1+(c_2+d_2x)y_2 = 0$$

an, so vereinfachen sich diese zu

$$(x-\varepsilon_2)\frac{dz_1}{dx}+\alpha_1z_1+\beta_1z_2 = 0,$$

$$(x-\varepsilon_1)\frac{dz_1}{dx}+\alpha_2z_1+\beta_2z_2 = 0$$

und können alsdann durch die hypergeometrische Reihe integrirt werden.

Dresden, Juni 1884.

Ueber die constanten Factoren der Thetareihen.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

In den ***Fundamenta nova*** definirt ***Jacobi*** die Thetafunctionen durch unendliche Producte, leitet aus dieser Darstellung ihre Periodicitätseigenschaften ab, und entwickelt sie mit Hülfe deren in unendliche Reihen. Die Coefficienten derselben erhält er auf diesem Wege nur bis auf einen gemeinsamen Factor genau. Die Bestimmung dieses Factors aber erfordert einen besonderen Kunstgriff. (Determinatio ipsius A artificia particularia poscit. § 63.) Derselbe besteht darin, dass er einen Ausdruck herstellt, der sich nicht ändert, wenn q durch q^2 ersetzt wird, und daraus schliesst, dass er von q unabhängig ist. Einer ähnlichen Schwierigkeit begegnet ***Jacobi*** in der Vorlesung, in welcher er die Theorie der elliptischen Functionen aus der Theorie der Thetareihen abgeleitet hat (Ges. Werke, Bd. I, S. 516), und hebt sie hier durch Bildung eines Ausdrucks, der beim Uebergange von q zu q^4 ungeändert bleibt. Setzt man

$$(1.)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\nu\\ \mu\end{bmatrix}(v) = \sum_n e^{2\pi i(v+\frac{1}{2}\mu)(n+\frac{1}{2}\nu)+i\pi\tau(n+\frac{1}{2}\nu)^2}$$

und dann (nach der von der ***Jacobi***schen abweichenden Bezeichnung des Herrn ***Weierstrass***)

$$(2.)\qquad \vartheta_0 = \vartheta\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\quad \vartheta_1 = \vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \vartheta_2 = \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\quad \vartheta_3 = \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

so ergiebt sich die Bestimmung jener Constanten aus der Formel

$$(3.)\qquad \vartheta_0' = \pi\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3,$$

wo zur Abkürzung $\vartheta_1 = \vartheta_1(0)$ gesetzt ist. Diese Formel folgt also nicht daraus allein, dass die Thetafunctionen im Endlichen überall holomorph sind und den Gleichungen

$$(4.)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\nu\\ \mu\end{bmatrix}(v+1) = (-1)^\nu\vartheta\begin{bmatrix}\nu\\ \mu\end{bmatrix}(v),\quad \vartheta\begin{bmatrix}\nu\\ \mu\end{bmatrix}(v+\tau) = (-1)^\mu e^{-i\pi(2v+\tau)}\vartheta\begin{bmatrix}\nu\\ \mu\end{bmatrix}(v)$$

genügen, sondern aus der speciellen Reihenform (1.), und sie dient zur Ermittlung des bei jener Definition unbestimmt bleibenden, von v unabhängigen Factors.

Setzt man für irgend eine Charakteristik

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \tau} = \Theta(v),$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (4.), dass diese Function dieselben Eigenschaften hat wie $\vartheta(v)$. Sie kann sich folglich von dieser nur durch einen von v unabhängigen Factor unterscheiden und demnach ist

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \tau} = c\,\vartheta(v).$$

Für die specielle durch die Reihe (1.) definirte Function ist bekanntlich $c = 0$. Fügt man also zu den Bedingungen (4.) noch die partielle Differentialgleichung

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0,$$

so ist dadurch die Thetafunction bis auf einen numerischen Factor genau bestimmt. (Vgl. *Clebsch* und *Gordan*, *Abel*sche Functionen § 90.) Anstatt also, wie *Jacobi*, zum Beweise der Gleichung (3.) die Reihe (1.) zu benutzen, kann man dazu auch die partielle Differentialgleichung (5.) verwenden. Diesen Weg, den zuerst Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über die elliptischen Functionen eingeschlagen hat, werde ich im Folgenden benutzen. Nachdem ich in § 1 zwei von der Deduction des Herrn *Weierstrass* nur wenig abweichende Beweise jener Formel entwickelt habe, wende ich in den folgenden Paragraphen die nämliche Methode an, um für Thetafunctionen von zwei und drei Variabeln und allgemein für hyperelliptische Thetafunctionen die analogen Formeln zu beweisen. Dabei bediene ich mich der Bezeichnungen, die ich in meiner Arbeit *Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln* (dieses Journal Bd. 89) entwickelt habe. Ich werde dieselbe im Folgenden mit *T.* citiren. Sind

$$A = \binom{\nu_1 \dots \nu_\varrho}{\mu_1 \dots \mu_\varrho}, \quad B = \binom{\nu'_1 \dots \nu'_\varrho}{\mu'_1 \dots \mu'_\varrho}$$

zwei Charakteristiken, so ist die Function

$$(6.)\qquad \vartheta[A](v) = \sum_{n_1, \dots n_\varrho} e^{2\pi i \sum\limits_\alpha (v^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\mu_\alpha)(n_\alpha + \frac{1}{2}\nu_\alpha) + i\pi \sum\limits_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta}(n_\alpha + \frac{1}{2}\nu_\alpha)(n_\beta + \frac{1}{2}\nu_\beta)}$$

bis auf einen von v unabhängigen Factor genau dadurch bestimmt, dass sie

im Endlichen überall holomorph ist, und für jede Charakteristik B der Gleichung

$$(7.)\quad \vartheta[A](v+2B) = (A,B)e^{-2\pi i\sum\limits_{\alpha}\nu'_\alpha v^{(\alpha)} - i\pi\sum\limits_{\alpha,\beta}\tau_{\alpha\beta}\nu'_\alpha\nu'_\beta}\vartheta[A](v)$$

genügt. Setzt man

$$D_\alpha\vartheta(v) = \frac{\partial\vartheta(v)}{\partial v^{(\alpha)}},$$

so genügt die Reihe (6.) den partiellen Differentialgleichungen

$$(8.)\quad D_\alpha^2\vartheta - 4\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\alpha}} = 0,\quad D_\alpha D_\beta\vartheta - 2\pi i\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}} = 0,$$

während man aus den Relationen (7.) nur schliessen kann, dass die Ausdrücke auf den linken Seiten dieser Gleichungen den nämlichen Relationen genügen.

Ist $\nu \equiv \varrho$ (mod. 4) und $\nu \leqq 2\varrho+2$, so giebt es Fundamentalsysteme von $2\varrho+2$ Charakteristiken, welche ν ungerade und $2\varrho+2-\nu$ gerade enthalten (*T.* § 5). Speciell giebt es daher Fundamentalsysteme von ϱ ungeraden und $\varrho+2$ geraden Charakteristiken. Ist $\varrho < 4$, so sind durch die ϱ ungeraden Charakteristiken die dazu gehörigen $\varrho+2$ geraden, und durch die $\varrho+2$ geraden die dazu gehörigen ϱ ungeraden vollständig bestimmt, während dies für $\varrho > 3$ nicht mehr der Fall ist. Z. B. sind für $\varrho = 4$ zwar die vier ungeraden Charakteristiken durch die sechs geraden mitbestimmt; die vier ungeraden Charakteristiken aber können auf zwei Arten durch sechs gerade zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden. Sind nun $A_1, \dots A_\varrho$ die ϱ ungeraden und $B_1, \dots B_{\varrho+2}$ die $\varrho+2$ geraden Charakteristiken eines Fundamentalsystems, so findet für $\varrho = 1, 2, 3$ die Relation statt

$$(9.)\quad |D_\beta\vartheta[A_\alpha]| = \pm\pi^\varrho\prod_\gamma\vartheta[B_\gamma] \qquad (\alpha,\beta=1,\dots\varrho;\ \gamma=1,\dots\varrho+2).$$

Dieselbe Relation gilt für einen beliebigen Werth von ϱ, falls das Fundamentalsystem ein bestimmtes ist und die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ den für die hyperelliptischen Functionen eigenthümlichen Bedingungen genügen.

Für $\varrho = 2$ ist diese Beziehung von Herrn ***Rosenhain*** ohne Beweis mitgetheilt worden (Mém. Sav. Etrang. XI.) und seinen Andeutungen nach durch eine Verallgemeinerung des oben erwähnten *Jacobi*schen Verfahrens bewiesen worden. (Vgl. *Weber*, dieses Journal Bd. 84, S. 338.) Dass für $\varrho = 3$ eine ähnliche Gleichung existire, war aus der Formel zu vermuthen, welche Herr *Weber* für das Verhältniss zweier Determinanten von der

Form (9.) gefunden hat. (*Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3;* S. 42.) Für die hyperelliptischen Thetafunctionen ist die obige Relation von Herrn *Thomae* (dieses Journal Bd. 71, S. 218.) aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale abgeleitet worden.

§ 1.

$\varrho = 1.$

Ist $\varrho = 1$, so ist bekanntlich

$$(1.)\quad \vartheta_1(v)\vartheta_0'(v)-\vartheta_0(v)\vartheta_1'(v) = c\vartheta_2(v)\vartheta_3(v),$$

wo c eine Constante ist. Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von v, so erhält man durch Vergleichung der Anfangsglieder

$$\vartheta_1\vartheta_0' = c\vartheta_2\vartheta_3$$

und durch Vergleichung der Glieder zweiter Ordnung

$$\vartheta_1\vartheta_0'''+\vartheta_1''\vartheta_0'-2\vartheta_0'\vartheta_1'' = c(\vartheta_2\vartheta_3''+\vartheta_2''\vartheta_3)$$

und daraus durch Elimination von c

$$(2.)\quad \frac{\vartheta_0'''}{\vartheta_0'} = \sum_\gamma \frac{\vartheta_\gamma''}{\vartheta_\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Zufolge der partiellen Differentialgleichung (5.) der Einleitung ergiebt sich daraus

$$\frac{d\log\vartheta_0'}{d\tau} = \sum_\gamma \frac{d\log\vartheta_\gamma}{d\tau},$$

und folglich ist

$$(3.)\quad \vartheta_0' = \varepsilon\pi\Pi\vartheta_\gamma,$$

wo ε eine numerische Constante ist. Durch Entwicklung nach Potenzen von $e^{i\pi\tau}$ und Vergleichung der Anfangsglieder findet man $\varepsilon = 1$. Zu der Gleichung (2.) kann man auch gelangen, indem man von der Formel

$$(4.)\quad \vartheta_0(2v) = c\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)$$

ausgeht und in den Entwicklungen beider Seiten die Glieder erster und dritter Ordnung vergleicht.

§ 2.

$\varrho = 2.$

Gegeben sei ein System von $\alpha+1$ wesentlich unabhängigen Charakteristiken nebst allen ihren wesentlichen Combinationen $A, A_1, \dots A_{a-1}$, wo $a = 2^\alpha$ ist. Dann giebt es ein zweites System von $\beta+1$ wesentlich

unabhängigen Charakteristiken nebst ihren wesentlichen Combinationen $B, B_1, \dots B_{b-1}$, wo $b = 2^\beta$ und $\alpha+\beta = 2\varrho$ ist, in der Art, dass zwischen je zwei Charakteristiken des ersten und je zwei des andern Systems die Beziehung

$$(1.)\quad (A_\varkappa A_\lambda,\ B_\mu B_\nu) = +1$$

besteht. Zwei solche vollständige Systeme habe ich *adjungirte* genannt (dieses Journal Bd. 96 S. 94). Einer Formel des Herrn *Prym* (Untersuchungen über die *Riemann*sche Thetaformel, Leipzig 1882; Seite 87) zufolge ist dann

$$(2.)\quad \begin{cases} \quad 2^{\varrho-\alpha}\Sigma(BA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u+v)\,(u-v)\,(u'+v')(u'-v') \\ = (AB)\,\Sigma(AB_\lambda)\vartheta[B_\lambda](u+v')(u-v')(u'+v)\,(u'-v). \end{cases}$$

Ist speciell $\alpha = \beta = \varrho$, so ist folglich

$$(3.)\quad \begin{cases} \quad \Sigma(BA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u+v)\,(u-v)\,(u'+v')(u'-v') \\ = (AB)\Sigma(AB_\lambda)\vartheta[B_\lambda](u+v')(u-v')(u'+v)\,(u'-v). \end{cases}$$

Seien jetzt v_α $(\alpha = 0, 1, \dots 2^\varrho-1)$ 2^ϱ Systeme von Variabeln. Setzt man dann in jener Formel

$$u' = u,\quad v = v_\alpha,\quad v' = v_\beta$$

und bedient sich der Abkürzung

$$\vartheta(u, v) = \vartheta(u+v)\vartheta(u-v),$$

so erhält man

$$\sum_\lambda(BA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u, v_\alpha)\vartheta[A_\lambda](u, v_\beta) = (AB)\sum_\lambda(AB_\lambda)\vartheta[B_\lambda](u, v_\alpha)\vartheta[B_\lambda](u, v_\beta).$$

Nun ist aber die Determinante vom Grade 2^ϱ

$$|\sum_\lambda(BA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u, v_\alpha)\vartheta[A_\lambda](u, v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots 2^\varrho-1)$$

gleich dem Producte der beiden Determinanten

$$|\vartheta[A_\lambda](u, v_\alpha)|\,|(BA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u, v_\beta)|,$$

und mithin ist

$$\Pi(BA_\lambda).|\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)|^2 = \Pi(AB_\lambda).|\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)|^2.$$

Aus dem Satze, den ich dieses Journal Bd. 96, S. 87 (Formel (2.)) über die Anzahl der ungeraden Charakteristiken eines vollständigen Systems entwickelt habe, schliesst man leicht, dass in allen Fällen $\Pi(BA_\lambda) = \Pi(AB_\lambda)$ ist. (Dasselbe Resultat ergiebt sich aus der letzten Formel selbst, indem man in derselben die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ als rein imaginär und die Variabeln sämmtlich als reell voraussetzt, weil dann die Werthe der Thetafunctionen alle reell sind.) Demnach ist

$$(4.)\quad |\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)| = \pm|\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots 2^\varrho-1).$$

Für $\varrho = 2$ seien $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ die sechs ungeraden Charakteristiken und $A = A_1 A_2 A_3 \equiv B_1 B_2 B_3 = B$. Dann sind die Bedingungen (1.) erfüllt, und mithin gilt die Formel (4.). Setzt man in derselben $v_4 = u$, so verschwinden in beiden Determinanten die Elemente der letzten Colonne, bis auf eins, welches gleich $\vartheta[A](0)(2u) = \vartheta[B](0)(2u)$ wird, und mithin ist

$$|\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)| = \pm |\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Vermehrt man u um eine beliebige halbe Periode, so erhält man also den Satz:

Bilden die sechs Charakteristiken A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 ein Fundamentalsystem, so ist

$$(5.) \qquad |\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)| = \pm |\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2).$$

Sind die sechs Charakteristiken eines Fundamentalsystems nicht alle ungerade, so sind vier derselben gerade und zwei ungerade. Seien B_1, B_2 ungerade, B, A, A_1, A_2 gerade. Entwickelt man dann beide Seiten der Gleichung (5.) nach Potenzen von $v-u, v_1-u, v_2-u$ und vergleicht die Coefficienten *) von $(v_1'-u')(v_2''-u'')$, so erhält man

$$\Pi\vartheta[A_\alpha].|D_\beta\vartheta[A_\alpha](u)| = \pm\vartheta[B].[B_1, B_2].\Pi\vartheta[B_\alpha](u) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2),$$

wo $D_0\vartheta(u) = \vartheta(u)$ und

$$[B_1, B_2] = |D_\beta\vartheta[B_\alpha]| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

gesetzt ist. Die Determinante dritten Grades $|D_\beta\vartheta[A_\alpha](u)|$ will ich die *Determinante der drei Functionen* $\vartheta[A_\alpha](u)$ nennen. Durch $(\vartheta[A](u))^3$ dividirt geht sie bekanntlich in die Functionaldeterminante der beiden Quotienten $\frac{\vartheta[A_1](u)}{\vartheta[A](u)}$ und $\frac{\vartheta[A_2](u)}{\vartheta[A](u)}$ über. Vermehrt man in der obigen Formel u um irgend eine halbe Periode, so erhält man den Satz:

Die Determinante dreier Thetafunctionen eines Fundamentalsystems ist bis auf einen constanten Factor gleich dem Producte der drei andern.

In der Formel

$$(6.) \qquad |\vartheta[A_\alpha](u), \; D_1\vartheta[A_\alpha](u), \; D_2\vartheta[A_\alpha](u)| = c\,\Pi\vartheta[B_\alpha](u) \qquad (\alpha = 0, 1, 2)$$

seien jetzt A_1, A_2 ungerade, A, B, B_1, B_2 gerade. Setzt man in derselben $u = 0$, so erhält man

$$\vartheta[A].[A_1, A_2] = c\,\Pi\vartheta[B_\alpha].$$

---

*) Der Buchstabe u bedeutet das System der beiden Variabeln u', u''.

Ich entwickle nun beide Seiten jener Gleichung nach Potenzen von u (d. h. von u' und u'') und setze zur Abkürzung

$$D\vartheta = u'D_1\vartheta + u''D_2\vartheta,\quad D^2\vartheta = u'^2 D_1^2\vartheta + 2u'u''D_1D_2\vartheta + u''^2 D_2^2\vartheta.$$

Vernachlässigt man die Glieder von höherer als der zweiten Ordnung, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \vartheta[A] + \frac{1}{2}D^2\vartheta[A] + \cdots & DD_1\vartheta[A] + \cdots & DD_2\vartheta[A] + \cdots \\ D\vartheta[A_1] + \cdots & D_1\vartheta[A_1] + \frac{1}{2}D^2D_1\vartheta[A_1] + \cdots & D_2\vartheta[A_1] + \frac{1}{2}D^2D_2\vartheta[A_1] + \cdots \\ D\vartheta[A_2] + \cdots & D_1\vartheta[A_2] + \frac{1}{2}D^2D_1\vartheta[A_2] + \cdots & D_2\vartheta[A_2] + \frac{1}{2}D^2D_2\vartheta[A_2] + \cdots \end{vmatrix}$$
$$= c\Pi(\vartheta[B_\alpha] + \tfrac{1}{2}D^2\vartheta[B_\alpha] + \cdots).$$

In der Determinante links ziehe ich die Elemente der zweiten und dritten Colonne, mit u' und u'' multiplicirt, von denen der ersten ab. Dann wird z. B. das zweite Element der ersten Colonne, mit Vernachlässigung der Glieder von höherer als der zweiten Ordnung,

$$D\vartheta[A_1] - u'D_1\vartheta[A_1] - u''D_2\vartheta[A_1] = 0.$$

Demnach ist jene Determinante gleich

$$(\vartheta[A] - \tfrac{1}{2}D^2\vartheta[A] + \cdots)$$
$$\times \begin{vmatrix} D_1\vartheta[A_1] + \frac{1}{2}D^2D_1\vartheta[A_1] + \cdots & D_2\vartheta[A_1] + \frac{1}{2}D^2D_2\vartheta[A_1] + \cdots \\ D_1\vartheta[A_2] + \frac{1}{2}D^2D_1\vartheta[A_2] + \cdots & D_2\vartheta[A_2] + \frac{1}{2}D^2D_2\vartheta[A_2] + \cdots \end{vmatrix}.$$

Durch Vergleichung der Glieder zweiter Ordnung in der obigen Formel erhält man demnach

$$\vartheta[A]\left\{\begin{vmatrix} D^2D_1\vartheta[A_1] & D_2\vartheta[A_1] \\ D^2D_1\vartheta[A_2] & D_2\vartheta[A_2] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1\vartheta[A_1] & D^2D_2\vartheta[A_1] \\ D_1\vartheta[A_2] & D^2D_2\vartheta[A_2] \end{vmatrix}\right\}$$
$$-D^2\vartheta[A].[A_1, A_2] = c(\vartheta[B_1]\vartheta[B_2]D^2\vartheta[B] + \vartheta[B_2]\vartheta[B]D^2\vartheta[B_1]$$
$$+\vartheta[B]\vartheta[B_1]D^2\vartheta[B_2]),$$

oder wenn man den Werth von c einsetzt und die Zeichen A, B durch B_3, B_4 ersetzt,

$$\left\{\begin{vmatrix} D^2D_1\vartheta[A_1] & D_2\vartheta[A_1] \\ D^2D_1\vartheta[A_2] & D_2\vartheta[A_2] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1\vartheta[A_1] & D^2D_2\vartheta[A_1] \\ D_1\vartheta[A_2] & D^2D_2\vartheta[A_2] \end{vmatrix}\right\} : \begin{vmatrix} D_1\vartheta[A_1] & D_2\vartheta[A_1] \\ D_1\vartheta[A_2] & D_2\vartheta[A_2] \end{vmatrix}$$
$$= \sum_\gamma{}_1^4 \frac{D^2\vartheta[B_\gamma]}{\vartheta[B_\gamma]}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind quadratische Functionen von u' und u''. Da deren Coefficienten einzeln übereinstimmen, so bleibt die Gleichung richtig, wenn man u'^2, $u'u''$, u''^2 durch beliebige andere Grössen, z. B. durch

$d\tau_{11}$, $d\tau_{12}$, $d\tau_{22}$ ersetzt. Dann erhält man aber den Differentialgleichungen (8.) der Einleitung zufolge

$$d\log[A_1, A_2] = \sum_\gamma d\log\vartheta[B_\gamma],$$

wo

$$d\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{11}}d\tau_{11} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{12}}d\tau_{12} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{22}}d\tau_{22}$$

gesetzt ist. Durch Integration dieser Gleichung ergiebt sich

$$(7.) \qquad [A_1, A_2] = \varepsilon\pi^2\Pi\vartheta[B_\gamma],$$

wo ε von den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ unabhängig ist.

§ 3.

Hyperelliptische Functionen.

Ist A, A_1, ... $A_{2\varrho-1}$ ein Fundamentalsystem von $2\varrho+2$ Charakteristiken, K die Summe aller ungeraden Charakteristiken desselben und C_ν die Summe von irgend ν jener Charakteristiken, so ist KC_ν gerade, falls $\nu \equiv \varrho+1$ (mod. 4) ist, aber ungerade, falls $\nu \equiv \varrho-1$ ist. Setzt man für ν nur Zahlen, die $\equiv \varrho+1$ (mod. 2) sind, so kann man den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ solche Werthe ertheilen, dass stets $\vartheta[KC_\nu] = 0$ ist, falls ν von $\varrho+1$ verschieden ist, dass aber die Grössen $\vartheta[KC_{\varrho+1}]$ sämmtlich von Null verschieden sind.

Die $2\varrho+2$ Charakteristiken des gegebenen Fundamentalsystems will ich jetzt mit A, A_1, ... A_ϱ, B, B_1, ... B_ϱ bezeichnen. Ist dann

$$(1.) \qquad G = KAA_1\dots A_\varrho \equiv KBB_1\dots B_\varrho,$$

so ist $\vartheta[G]$ nicht gleich Null. Ist $r = 2^\varrho$ und sind $A_{\varrho+1}$, ... A_{r-1} die wesentlichen Combinationen der Charakteristiken A, A_1, ... A_ϱ und $B_{\varrho+1}$, ... B_{r-1} die der Charakteristiken B, B_1, ... B_ϱ, so sind die beiden vollständigen Systeme GBA_λ und GBB_λ ($\lambda = 0, 1, \dots r-1$) adjungirt, und mithin ist nach Formel (3.) § 2

$$\begin{aligned}&\Sigma(BA_\lambda)\vartheta[GBA_\lambda](u+v)(u-v)(u'+v')(u'-v')\\ &= (AB)\Sigma(AB_\lambda)\vartheta[GBB_\lambda](u+v')(u-v')(u'+v)(u'-v).\end{aligned}$$

Da $\vartheta[GBB_\lambda] = 0$ ist, wenn λ von 0 verschieden ist, so erhält man, wenn man $v' = u$ setzt,

$$\Sigma(BA_\lambda)\vartheta[GBA_\lambda](u+v)(u-v)(u'+u)(u'-u) = \vartheta[G](0)(2u)(u'+v)(u'-v).$$

Da ferner $\vartheta[GBA_\lambda] = 0$ ist, wenn $\lambda > \varrho$ ist, so erhält man, wenn man

$u' = u$ setzt,

$$\vartheta[G](0)(2u)(u+v)(u-v) = \sum_\alpha (BA_\alpha)\vartheta[GBA_\alpha](0)(2u)(u+v)(u-v),$$

wo sich α von 0 bis ϱ bewegt. In dieser Formel setze ich für v der Reihe nach $\varrho+1$ verschiedene Werthsysteme $v, v_1, \dots v_\varrho$ ein. Aus den $\varrho+1$ so erhaltenen Gleichungen folgt

$$|\vartheta[GBA](u,v_\beta), \dots \vartheta[GBA_{\varrho-1}](u,v_\beta), \quad \vartheta[GBA_\varrho](u,v_\beta)| : \vartheta[G](0)(2u)$$
$$= \pm|\vartheta[GBA](u,v_\beta), \dots \vartheta[GBA_{\varrho-1}](u,v_\beta), \quad \vartheta[G](u,v_\beta)| : \vartheta[GBA_\varrho](0)(2u),$$

oder wenn man u um GB vermehrt,

$$|\vartheta[A](u,v_\beta), \dots \vartheta[A_{\varrho-1}](u,v_\beta), \vartheta[A_\varrho](u,v_\beta)| : \vartheta[KA\dots A_{\varrho-1}A_\varrho](0)(2u)$$
$$= \pm|\vartheta[A](u,v_\beta), \dots \vartheta[A_{\varrho-1}](u,v_\beta), \vartheta[B](u,v_\beta)| : \vartheta[KA\dots A_{\varrho-1}B](0)(2u).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel findet man, dass der Quotient

$$|\vartheta[A](u,v_\beta), \dots \vartheta[A_\varrho](u,v_\beta)| : \vartheta[KA\dots A_\varrho](0)(2u)$$

abgesehen vom Vorzeichen ungeändert bleibt, wenn man für $A, A_1, \dots A_\varrho$ irgend $\varrho+1$ andere Charakteristiken des gegebenen Fundamentalsystems setzt. Mithin ist

$$|\vartheta[A](u,v_\beta), \dots \vartheta[A_\varrho](u,v_\beta)| : \vartheta[KAA_1\dots A_\varrho](0)(2u)$$
$$= \pm|\vartheta[B](u,v_\beta), \dots \vartheta[B_\varrho](u,v_\beta)| : \vartheta[KBB_1\dots B_\varrho](0)(2u)$$

oder, weil $AA_1\dots A_\varrho \equiv BB_1\dots B_\varrho$ ist,

$$(2.)\qquad |\vartheta[A_\alpha](u,v_\beta)| = \pm|\vartheta[B_\alpha](u,v_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots \varrho).$$

Zu dieser Gleichung kann man auch auf folgendem Wege gelangen: Nach Formel (4.) § 2 ist

$$|\vartheta[GA_\varkappa](u,v_\lambda)| = \pm|\vartheta[GB_\varkappa](u,v_\lambda)| \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \dots r-1).$$

Setzt man in dieser Gleichung $v_{\varrho+1} = A_{\varrho+1}, \dots v_{r-1} = A_{r-1}$, so erhält man

$$(\vartheta[G](0)(2u))^{r-\varrho-1}|\vartheta[GA_\alpha](u,v_\beta)| = \pm\left(\begin{matrix}BB_\lambda\\ AA_\varkappa\end{matrix}\right)\vartheta[GA_\varkappa B_\lambda](0)(2u)\,|.|\vartheta[GB_\alpha](u,v_\beta)|$$
$$(\alpha, \beta = 0, 1, \dots \varrho;\ \varkappa, \lambda = \varrho+1, \dots r-1).$$

Setzt man aber $v_{\varrho+1} = B_{\varrho+1}, \dots v_{r-1} = B_{r-1}$, so erhält man

$$\left(\begin{matrix}AA_\varkappa\\ BB_\lambda\end{matrix}\right)\vartheta[GA_\varkappa B_\lambda](0)(2u)\,|.|\vartheta[GA_\alpha](u,v_\beta)| = \pm(\vartheta[G](0)(2u))^{r-\varrho-1}|\vartheta[GB_\alpha](u,v_\beta)|.$$

Nun ist aber

$$\left(\begin{matrix}AA_\varkappa\\ BB_\lambda\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}BB_\lambda\\ AA_\varkappa\end{matrix}\right) = (AA_\varkappa, BB_\lambda) = 1, \quad \text{also} \quad \left(\begin{matrix}AA_\varkappa\\ BB_\lambda\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}BB_\lambda\\ AA_\varkappa\end{matrix}\right)$$

und folglich

$$|\vartheta[GA_\alpha](u, v_\beta)| = \pm|\vartheta[GB_\alpha](u, v_\beta)|.$$

Durch Vermehrung von u um G ergiebt sich daraus die Formel (2.).

Vermehrt man in derselben u um $H = KB_1 \dots B_\varrho$, so werden die Charakteristiken HB, HA, ... HA_ϱ gerade, dagegen HB_1, ... HB_ϱ ungerade. Aus der Formel

$$|\vartheta[HA_\alpha](u, v_\beta)| = \pm|\vartheta[HB_\alpha](u, v_\beta)|$$

erhält man dann in derselben Weise wie in § 2 die Relation

$$\Pi\vartheta[HA_\alpha].|D_\beta\vartheta[HA_\alpha](u)| = \vartheta[HB].[HB_1, \dots HB_\varrho]\,\Pi\vartheta[HB_\alpha](u),$$

oder wenn man u um H vermehrt,

$$(3.)\qquad |D_\beta\vartheta[A_\alpha](u)| = c\,\Pi\vartheta[B_\alpha](u).$$

Ich setze jetzt voraus, dass A_1, ... A_ϱ ungerade sind, A, B, B_1, ... B_ϱ aber gerade. Sollte dies bei dem ursprünglichen Fundamentalsystem nicht der Fall sein, so erreicht man es, indem man alle Charakteristiken um $KA_1 \dots A_\varrho$ vermehrt. (Die Bedingungen des hyperelliptischen Falles bleiben ungeändert, wenn alle Charakteristiken des gegebenen Fundamentalsystems um dieselbe Charakteristik vermehrt werden, wenn dieses Fundamentalsystem also durch irgend ein anderes des nämlichen *Complexes* ersetzt wird). Setzt man dann in der Formel (3.) $u = 0$, so erhält man

$$\vartheta[A].[A_1, \dots A_\varrho] = c\,\Pi\vartheta[B_\alpha].$$

Entwickelt man ferner beide Seiten nach Potenzen von u und vergleicht die Glieder zweiter Ordnung, so findet man, wie in § 2

$$\begin{aligned} &|D^2D_\alpha\vartheta[A_1], \quad D_\alpha\vartheta[A_2], \quad \dots \quad D_\alpha\vartheta[A_\varrho]| \\ +&|\,D_\alpha\vartheta[A_1], \quad D^2D_\alpha\vartheta[A_2], \quad \dots \quad D_\alpha\vartheta[A_\varrho]| \\ +&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +&|\,D_\alpha\vartheta[A_1], \quad D_\alpha\vartheta[A_2], \quad \dots \quad D^2D_\alpha\vartheta[A_\varrho]| \\ &= [A_1, A_2, \dots A_\varrho]\sum_{\gamma}^{\varrho+2}{}_1 \frac{D^2\vartheta[B_\gamma]}{\vartheta[B_\gamma]}, \end{aligned}$$

wo A, B durch $B_{\varrho+1}$, $B_{\varrho+2}$ ersetzt ist. In dieser Gleichung setze man für $u^{(\alpha)}u^{(\beta)}$ das Differential $d\tau_{\alpha\beta}$. Sind die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ unabhängige Variabeln (deren Veränderlichkeit nur durch die Bedingungen der Convergenz der Thetareihe eingeschränkt ist), so ist dann

$$\Sigma\frac{D^2\vartheta[B_\gamma]}{\vartheta[B_\gamma]} = 4\pi i\,d\log\Pi\vartheta[B_\gamma].$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, wenn die Veränderlichkeit der Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ durch irgend welche Relationen beschränkt wird, und demnach geht aus der obigen Formel die Relation

$$d\log[A_1, \dots A_\varrho] = d\log \Pi\vartheta[B_\gamma]$$

hervor und daraus durch Integration

$$(4.) \qquad [A_1, \dots A_\varrho] = \varepsilon\pi^\varrho \Pi\vartheta[B_\gamma],$$

wo ε eine numerische Constante ist.

§ 4.

$\varrho = 3.$

Bilden die drei ungeraden Charakteristiken A_1, A_2, A_3 *und die fünf geraden Charakteristiken* $B_1, \dots B_5$ *ein Fundamentalsystem, und ist*

$$A = \Sigma A_\alpha \equiv \Sigma B_\gamma,$$

so ist

$$(1.) \qquad |D_\beta\vartheta[A_\alpha](u)| : c = \Sigma\frac{\vartheta[B_\gamma](2u)}{\vartheta[B_\gamma]} - \frac{\vartheta[A](2u)}{\vartheta[A]} \qquad (\alpha, \beta = 0, \dots 3;\ \gamma = 1, \dots 5),$$

wo

$$c = \tfrac{1}{4}\vartheta[A].[A_1, A_2, A_3]$$

eine Constante ist.

Die Determinante auf der linken Seite der Gleichung (1.), die ich mit $\varphi(u)$ bezeichnen will, ist eine Thetafunction vierten Grades, die sich bei Vermehrung des Arguments um ganze Perioden ebenso ändert, wie $\vartheta[G](2u)$, falls G irgend eine Charakteristik ist. Die 4^ϱ gleichändrigen Functionen $\vartheta[G](2u)$, die man erhält, indem man G alle Charakteristiken durchlaufen lässt, sind von einander unabhängig (*T.* S. 200). Da es nicht mehr als 4^ϱ solche Functionen giebt, so muss $\varphi(u)$ eine lineare Verbindung derselben sein

$$\varphi(u) = \sum_G c_G\vartheta[G](2u).$$

Da $\varphi(u)$ gerade ist, so braucht G nur die 36 geraden Charakteristiken

$$A, \quad B_\gamma, \quad A_\alpha B_\gamma B_\delta$$

zu durchlaufen, wo sich α von 1 bis 3 bewegt und γ, δ zwei verschiedene der Indices von 1 bis 5 bedeuten. Vermehrt man in jener Gleichung u um $A_\alpha A_\beta$, wo α, β zwei verschiedene der Indices 1, 2, 3 sind, so erhält man

$$-\varphi(u) = \sum_G c_G(G, A_\alpha, A_\beta)\vartheta[G](2u),$$

und daher muss $(G, A_\alpha, A_\beta) = -1$ sein. Da aber $(A_\alpha B_\gamma B_\delta, A_\alpha, A_\beta) = +1$ ist, so kann G nur eine der sechs Charakteristiken A, B_γ sein, und folglich ist

$$\varphi(u) = -c\frac{\vartheta[A](2u)}{\vartheta[A]} + \sum_\gamma c_\gamma \frac{\vartheta[B_\gamma](2u)}{\vartheta[B_\gamma]}.$$

Setzt man $u = B_1 B_2$, so verschwindet die Determinante, weil die drei Charakteristiken $A_\alpha B_1 B_2$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ gerade sind. Da ferner $(A, B_1 B_2) = -(B_1, B_2)$ und $(B_\gamma, B_1 B_2) = -(B_1, B_2)$ ist, falls γ von 1 und 2 verschieden ist, aber gleich $+(B_1, B_2)$, falls $\gamma = 1$ oder 2 ist, so erhält man

$$c + c_1 + c_2 = c_3 + c_4 + c_5.$$

Ebenso ist

$$c + c_1 + c_3 = c_2 + c_4 + c_5$$

und folglich $c_2 = c_3$ und allgemein $c_\gamma = c_\delta$ und mithin auch $c = c_\gamma$. So ergiebt sich die Formel (1.) und, wenn man in derselben $u = 0$ setzt, die Constante c.

Ich entwickle nun beide Seiten der Gleichung (1.) nach Potenzen von u und vergleiche die Glieder zweiter Ordnung. Ebenso wie in § 2 findet man

$$\begin{aligned}\Big\{&\begin{vmatrix} D^2 D_\alpha\vartheta[A_1] & D_\alpha\vartheta[A_2] & D_\alpha\vartheta[A_3]\end{vmatrix}\\ +&\begin{vmatrix} D_\alpha\vartheta[A_1] & D^2 D_\alpha\vartheta[A_2] & D_\alpha\vartheta[A_3]\end{vmatrix}\\ +&\begin{vmatrix} D_\alpha\vartheta[A_1] & D_\alpha\vartheta[A_2] & D^2 D_\alpha\vartheta[A_3]\end{vmatrix}\\ -\frac{D^2\vartheta[A]}{\vartheta[A]}&\cdot[A_1, A_2, A_3]\Big\} : [A_1, A_2, A_3] = -\frac{D^2\vartheta[A]}{\vartheta[A]} + \Sigma\frac{D^2\vartheta[B_\gamma]}{\vartheta[B_\gamma]}\end{aligned}$$

und daher

$$d\log[A_1, A_2, A_3] = \Sigma d\log\vartheta[B_\gamma],$$

also

$$(2.) \qquad [A_1, A_2, A_3] = \varepsilon\pi^3 \Pi\vartheta[B_\gamma].$$

In der Formel (1.) sind A_1, A_2, A_3 irgend drei ungerade Charakteristiken, deren Summe A_0 gerade ist. Für drei ungerade Charakteristiken, deren Summe ungerade ist, besteht der folgende dem obigen Theorem analoge Satz:

Sind A_0, A_1, A_2, A_3 vier ungerade Charakteristiken, deren Summe Null ist, so ist

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} \vartheta[A_0](u) & \vartheta[A_1](u) & \vartheta[A_2](u) & \vartheta[A_3](u) \\ D_1\vartheta[A_0](u) & D_1\vartheta[A_1](u) & D_1\vartheta[A_2](u) & D_1\vartheta[A_3](u) \\ D_2\vartheta[A_0](u) & D_2\vartheta[A_1](u) & D_2\vartheta[A_2](u) & D_2\vartheta[A_3](u) \\ D_3\vartheta[A_0](u) & D_3\vartheta[A_1](u) & D_3\vartheta[A_2](u) & D_3\vartheta[A_3](u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vartheta[A_0](2u) & \vartheta[A_1](2u) & \vartheta[A_2](2u) & \vartheta[A_3](2u) \\ D_1\vartheta[A_0] & D_1\vartheta[A_1] & D_1\vartheta[A_2] & D_1\vartheta[A_3] \\ D_2\vartheta[A_0] & D_2\vartheta[A_1] & D_2\vartheta[A_2] & D_2\vartheta[A_3] \\ D_3\vartheta[A_0] & D_3\vartheta[A_1] & D_3\vartheta[A_2] & D_3\vartheta[A_3] \end{vmatrix}.$$

§ 5.

$\varrho = 3.$

Für die eben hergeleitete Formel (2.), § 4 will ich noch einen andern Beweis angeben, der zwar weit complicirter ist, aber eine grössere Analogie mit den vorhergehenden Entwicklungen darbietet. Bilden die acht Charakteristiken A_α, B_α $(\alpha = 0, \dots 3)$ ein Fundamentalsystem und ist

$$P = \Sigma B_\alpha \equiv \Sigma A_\alpha,$$

so sind die Charakteristiken $A_\alpha P$ die wesentlichen Combinationen der A_α und die Charakteristiken $B_\alpha P$ die der B_α. Daher kann man in der Formel (4.) § 2 $A_{4+\alpha} = A_\alpha P$ und $B_{4+\alpha} = B_\alpha P$ setzen. Ist K die Summe der ungeraden Charakteristiken des betrachteten Fundamentalsystems, und setzt man in jener Formel $v_{4+\beta} = u + KA_\beta$, so verschwindet $\vartheta[B_\alpha](u, v_{4+\beta})$ $(\alpha, \beta = 0, \dots 3)$ und folglich zerfällt die Determinante rechts in das Product zweier Determinanten vierten Grades. Ferner verschwindet

$$\vartheta[A_\alpha](u, v_{4+\beta}) \quad \text{und} \quad \vartheta[A_\alpha P](u, v_{4+\beta}),$$

falls α von β verschieden ist. Mithin ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} \vartheta[A](u,v) & \dots & \vartheta[A_3](u,v) & \vartheta[AP](u,v) & \dots & \vartheta[A_3P](u,v) \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vartheta[A](u,v_3) & \dots & \vartheta[A_3](u,v_3) & \vartheta[AP](u,v_3) & \dots & \vartheta[A_3P](u,v_3) \\ \vartheta[K](u,u) & \dots & 0 & \left(\begin{smallmatrix} P \\ KA \end{smallmatrix}\right)\vartheta[KP](u,u) & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \vartheta[K](u,u) & 0 & \dots & \left(\begin{smallmatrix} P \\ KA_3 \end{smallmatrix}\right)\vartheta[KP](u,u) \end{vmatrix}$$

$$= \pm|\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)| \cdot \left|\left(\begin{smallmatrix} A_\alpha \\ B_\beta \end{smallmatrix}\right)\vartheta[KPA_\alpha B_\beta](u,u)\right|.$$

Die linke Seite kann man leicht in eine Determinante vierten Grades umwandeln und erhält so

$$\left|\vartheta[KP](u,u)\vartheta[A_\alpha](u,v_\beta)-\binom{P}{KA_\alpha}\vartheta[K](u,u)\vartheta[A_\alpha P](u,v_\beta)\right|$$
$$= \pm|\vartheta[B_\alpha](u,v_\beta)|\cdot\left|\binom{A_\alpha}{B_\beta}\vartheta[KPA_\alpha B_\beta](u,u)\right|.$$

Setzt man $v_\beta = u+KPA_\beta$, so verschwinden in der Determinante links die Elemente ausserhalb der Diagonale, und man findet daher

$$(\vartheta^2[K](u,u)-(P)\vartheta^2[KP](u,u))^4 = +\left|\binom{A_\alpha}{B_\beta}\vartheta[KPA_\alpha B_\beta](u,u)\right|^2.$$

Das Vorzeichen bestimmt man, indem man die Variabeln reell und die Parameter rein imaginär annimmt. Aus den beiden letzten Formeln folgt

$$(1.)\quad\begin{cases}\left|\vartheta[KP](u,u)\vartheta[A_\alpha](u,v_\beta)-\binom{P}{KA_\alpha}\vartheta[K](u,u)\vartheta[A_\alpha P](u,v_\beta)\right|\\ \quad = \varepsilon(\vartheta^2[K](u,u)-(P)\vartheta^2[KP](u,u))^2|\vartheta[B_\alpha](u,v_\beta)|,\end{cases}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Vermehrt man u um P, so ergiebt sich daraus

$$(2.)\quad\begin{cases}\left|\vartheta[K](u,u)\vartheta[A_\alpha](u,v_\beta)-\binom{P}{KA_\alpha P}\vartheta[KP](u,u)\vartheta[A_\alpha P](u,v_\beta)\right|\\ \quad = \varepsilon(P)(\vartheta^2[K](u,u)-(P)\vartheta^2[KP](u,u))^2|\vartheta[B_\alpha P](u,v_\beta)|.\end{cases}$$

Sind R und RP zwei verschiedene ungerade Charakteristiken, ist $\sqrt{P}$ eine beliebige der beiden Quadratwurzeln aus (P), und setzt man

$$\varphi(u,v)=\varphi[R](u,v)=\vartheta[R](u,v)+\binom{P}{R}\sqrt{P}\,\vartheta[RP](u,v),$$

so ist, wie ich dieses Journal Bd. 96, S. 116 (Formel (6.)) gezeigt habe,

$$|\varphi(u_\alpha,v_\beta)| = |\varphi(u_\alpha,u_\beta)|^{\frac{1}{2}}|\varphi(v_\alpha,v_\beta)|^{\frac{1}{2}} \qquad (\alpha,\beta=0,\dots 3).$$

Setzt man in dieser Gleichung $u_\alpha = u+RA_\alpha$, wo A_α ($\alpha = 0, \dots 3$) irgend vier verschiedene Charakteristiken sind, so erhält man

$$|\vartheta[A_\alpha](u,v_\beta)+\binom{A_\alpha P}{P}\sqrt{P}\,\vartheta[A_\alpha P](u,v_\beta)| = \binom{R}{P}\Pi(A_\alpha)$$
$$\left|\vartheta[RA_\alpha A_\beta](u,u)+\binom{P}{RA_\alpha A_\beta}(A_\alpha,P)(P)\sqrt{P}\,\vartheta[RA_\alpha A_\beta P](u,u)\right|^{\frac{1}{2}}|\varphi(v_\alpha,v_\beta)|^{\frac{1}{2}}.$$

Sind jetzt $A, \dots A_3$ vier Charakteristiken eines Fundamentalsystems und ist P ihre Summe, so hat

$$(A_\alpha,P) = -(P)\Pi(A_\alpha)$$

für alle vier Charakteristiken denselben Werth. Ersetzt man in der ent-

wickelten Formel $\sqrt{P}$ durch $(A, P)(P)\sqrt{P}$, so erhält man

$$|\varphi[A_\alpha](u, v_\beta)| = \pm\left|(R, A_\alpha)\binom{A_\alpha}{A_\alpha A_\beta}\varphi[RA_\alpha A_\beta](u, u)\right|^{\frac{1}{2}}|\psi(v_\alpha, v_\beta)|^{\frac{1}{2}},$$

wo

$$\psi(u, v) = \vartheta[R](u, v) + \binom{P}{RP}(A, P)\sqrt{P}\,\vartheta[RP](u, v)$$

ist. Setzt man

$$\varphi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\beta\alpha} = (R, A_\alpha)\binom{A_\alpha}{A_\alpha A_\beta}\varphi[RA_\alpha A_\beta](u, u)$$

und wählt man $R = KAA_1$, so verschwinden die Grössen $\varphi_{\alpha\beta}$ bis auf φ_{01} und φ_{23}, und daher wird

$$|\varphi_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} = \varphi_{01}\varphi_{23} = \pm\varphi[K](u, u)\,\varphi[KP](u, u).$$

Sei ferner

$$\begin{aligned}|\psi(v_\alpha, v_\beta)|^{\frac{1}{2}} &= \psi(v, v_1)\psi(v_2, v_3) + \psi(v, v_2)\psi(v_3, v_1) + \psi(v, v_3)\psi(v_1, v_2)\\ &= \Phi + \Psi\sqrt{P},\end{aligned}$$

wo Φ und Ψ von $\sqrt{P}$ unabhängig sind, also

$$(3.)\quad \begin{cases}\Phi = \vartheta[R](v+v_1)(v-v_1)(v_2+v_3)(v_2-v_3) + \vartheta[R](v+v_2)(v-v_2)(v_3+v_1)(v_3-v_1)\\ +\vartheta[R](v+v_3)(v-v_3)(v_1+v_2)(v_1-v_2) + (P)(\vartheta[RP](v+v_1)(v-v_1)(v_2+v_3)(v_2-v_3)\\ +\vartheta[RP](v+v_2)(v-v_2)(v_3+v_1)(v_3-v_1) + \vartheta[RP](v+v_3)(v-v_3)(v_1+v_2)(v_1-v_2)).\end{cases}$$

Dann ist

$$(4.)\quad \begin{cases}|\varphi[A_\alpha](u, v_\beta)| = \varepsilon'(\Phi + \Psi\sqrt{P})\left(\vartheta[K](u, u) + \binom{P}{K}\sqrt{P}\,\vartheta[KP](u, u)\right)\\ \qquad\qquad\cdot\left(\vartheta[KP](u, u) + \binom{P}{KP}\sqrt{P}\,\vartheta[K](u, u)\right),\end{cases}$$

wo $\varepsilon' = \pm 1$ ist.

Die ganze Function vierten Grades der Variabeln r

$$\varepsilon'\left|\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta) + \binom{P}{A_\alpha}r\,\vartheta[A_\alpha P](u, v_\beta)\right|$$
$$-(\Phi + \Psi r)\left(\vartheta[K](u, u) + \binom{P}{K}r\,\vartheta[KP](u, u)\right)\left(\vartheta[KP](u, u) + \binom{P}{KP}r\,\vartheta[K](u, u)\right)$$

verschwindet daher für $r = \pm\sqrt{P}$ und ist folglich durch $1-(P)r^2$ theilbar, also gleich

$$(1-(P)r^2)(\Lambda + Mr + Nr^2).$$

Durch Vergleichung der constanten Glieder und der Coefficienten von r^4 ergiebt sich

$$\begin{aligned}\Lambda &= \varepsilon'|\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)| - \Phi\,\vartheta[K](u, u)\,\vartheta[KP](u, u),\\ N &= -\varepsilon'|\vartheta[A_\alpha P](u, v_\beta)|.\end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$r = -\binom{P}{K}\frac{\vartheta[K](u,u)}{\vartheta[KP](u,u)},$$

so erhält man nach Formel (1.)

$$\varepsilon\varepsilon'(\vartheta^2[K](u,u)-(P)\vartheta^2[KP](u,u))|\vartheta[B_\alpha](u,v_\beta)|$$

$$= -(P)\Big(\varLambda\vartheta^2[KP](u,u)-M\binom{P}{K}\vartheta[KP](u,u)\vartheta[K](u,u)+N\vartheta^2[K](u,u)\Big).$$

Setzt man aber

$$r = -\binom{P}{KP}\frac{\vartheta[KP](u,u)}{\vartheta[K](u,u)},$$

so erhält man nach Formel (2.)

$$\varepsilon\varepsilon'(P)(\vartheta^2[K](u,u)-(P)\vartheta^2[KP](u,u))|\vartheta[B_\alpha P](u,v_\beta)|$$

$$= \varLambda\vartheta^2[K](u,u)-M\binom{P}{KP}\vartheta[K](u,u)\vartheta[KP](u,u)+N\vartheta^2[KP](u,u)).$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\varepsilon\varepsilon'|\vartheta[B_\alpha](u,v_\beta)|+\varepsilon\varepsilon'(P)|\vartheta[B_\alpha P](u,v_\beta)| = \varLambda-(P)N.$$

Substituirt man darin die oben erhaltenen Ausdrücke für $\varLambda$ und N und ersetzt man ε und ε' durch $-\varepsilon\varepsilon'$ und ε, so erhält man

$$(5.)\quad\begin{cases}\varepsilon|\vartheta[A_\alpha](u,v_\beta)|+\varepsilon(P)|\vartheta[A_\alpha P](u,v_\beta)|\\+\varepsilon'|\vartheta[B_\alpha](u,v_\beta)|+\varepsilon'(P)|\vartheta[B_\alpha P](u,v_\beta)|\\= \vartheta[K](u,u)\vartheta[KP](u,u).\varPhi.\end{cases}$$

Ist ϑ eine ungerade Function, und entwickelt man den Ausdruck

$$\vartheta(v+v_1)(v-v_1)(v_2+v_3)(v_2-v_3)+\vartheta(v+v_2)(v-v_2)(v_3+v_1)(v_3-v_1)$$
$$+\vartheta(v+v_3)(v-v_3)(v_1+v_2)(v_1-v_2)$$

nach Potenzen von $v-u$, v_1-u, v_2-u, v_3-u, so ist der Coefficient von $(v_1'-u')(v_2''-u'')(v_3'''-u''')$ gleich $\vartheta(2u)$ mal

$$D_1\vartheta.(D_2\vartheta(2u).D_3\vartheta-D_3\vartheta(2u).D_2\vartheta)+D_2\vartheta.(D_3\vartheta(2u).D_1\vartheta-D_1\vartheta(2u).D_3\vartheta)$$
$$+D_3\vartheta.(D_1\vartheta(2u).D_2\vartheta-D_2\vartheta(2u).D_1\vartheta) = 0.$$

Ich setze nun voraus, von den acht Charakteristiken A_α, B_α seien B_1, B_2, B_3 ungerade, dagegen B, A, ... A_3 gerade. Dann ist BP gerade, während B_1P, B_2P, B_3P, AP, ... A_3P ungerade sind. Vergleicht man dann in den Entwicklungen beider Seiten der Gleichung (5.) die Coefficienten von $(v_1'-u')(v_2''-u'')(v_3'''-u''')$, und ersetzt man $2u$ durch u, so erhält man

$$\varepsilon\varPi\vartheta[A_\alpha]|D_\beta\vartheta[A_\alpha](u)|$$

$$= \varepsilon'\vartheta[B].[B_1,B_2,B_3]\varPi\vartheta[B_\alpha](u)+\varepsilon'(P)\vartheta[BP][B_1P,B_2P,B_3P]\varPi\vartheta[B_\alpha P](u).$$

Vermehrt man u um eine beliebige halbe Periode, so erkennt man, dass, wenn die acht Charakteristiken A_α, B_α irgend ein Fundamentalsystem bilden, eine Gleichung von der Form

$$(6.)\qquad |D_\beta\vartheta[A_\alpha](u)| = a\Pi\vartheta[B_\alpha](u)+b\Pi\vartheta[B_\alpha P](u)$$

besteht, in der a und b Constanten sind. Die vier Charakteristiken A_α können auf zwei Arten zu einem Fundamentalsystem ergänzt werden, nämlich ausser durch die B_α auch durch die $B_\alpha P$. (*T.* S. 211, Satz VI.) Die Formel (6.) ist demnach für $\varrho = 3$ das Analogon der für $\varrho = 2$ geltenden Formel (6.) § 2.

Ich nehme jetzt an, A_1, A_2, A_3 seien ungerade, dagegen $A, B, \dots B_3$ gerade. Dann sind die vier Charakteristiken $B_\alpha P$ ungerade, und daher fängt die Entwicklung des Productes $\Pi\vartheta[B_\alpha P](u)$ mit den Gliedern der vierten Ordnung an. Vergleicht man daher in den Entwicklungen der beiden Seiten der Gleichung (6.) die constanten Glieder und die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man, wie in § 2

$$(7.)\qquad [A_1, A_2, A_3] = \varepsilon\pi^3\Pi\vartheta[B_\gamma] \qquad (\gamma=1,\dots 5),$$

wo A, B durch B_4, B_5 ersetzt sind.

Zum Schluss will ich noch die Constanten a und b in der Formel (6.) bestimmen. Ist wieder A_α, B_α irgend ein Fundamentalsystem und K die Summe der ungeraden Charakteristiken desselben, so erhält man, indem man in (6.) u einmal gleich KA und das andere Mal gleich KAP setzt,

$$\frac{b}{a} = \binom{P}{A}\frac{\vartheta[K][KAA_1,\ KAA_2,\ KAA_3]}{\vartheta[KP][KAA_1P,\ KAA_2P,\ KAA_3P]}.$$

Die drei ungeraden Charakteristiken $KPAA_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3$), deren Summe congruent K ist, bilden zusammen mit den fünf geraden Charakteristiken KP, $KPAB_\alpha$ ein Fundamentalsystem. Nach Formel (1.) § 4 ist daher

$$|D_\alpha\vartheta[K](u),\ D_\alpha\vartheta[KPAA_1](u),\ D_\alpha\vartheta[KPAA_2](u),\ D_\alpha\vartheta[KPAA_3](u)| : k$$
$$= \frac{\vartheta[KP](2u)}{\vartheta[KP]}-\frac{\vartheta[K](2u)}{\vartheta[K]}+\sum_\alpha\frac{\vartheta[KPAB_\alpha](2u)}{\vartheta[KPAB_\alpha]}.$$

Vermehrt man in dieser Gleichung u um P, so erhält man

$$\binom{P}{A}\binom{K}{P}|D_\alpha\vartheta[KP](u),\ D_\alpha\vartheta[KAA_1](u),\ D_\alpha\vartheta[KAA_2](u),\ D_\alpha\vartheta[KAA_3](u)| : k$$
$$= \frac{\vartheta[KP](2u)}{\vartheta[KP]}-\frac{\vartheta[K](2u)}{\vartheta[K]}-\sum_\alpha\frac{\vartheta[KPAB_\alpha](2u)}{\vartheta[KPAB_\alpha]}.$$

Addirt man diese Gleichungen und setzt dann $u = 0$, so findet man

$$\vartheta[K][KPAA_1,\ KPAA_2,\ KPAA_3] + \binom{P}{A}\binom{K}{P}\vartheta[KP][KAA_1,\ KAA_2,\ KAA_3] = 0.$$

Man kann diese Formel in abgeänderter Bezeichnung so aussprechen:

Zerlegt man eine von 0 verschiedene Charakteristik P auf drei verschiedene Arten in eine Summe von zwei ungeraden Charakteristiken)* $A+PA$, $B+PB$, $C+PC$, *so ist*

$$\frac{[AP, BP, CP]}{[A,\ B,\ C]} = -\binom{P}{ABCP}\frac{\vartheta[ABC]}{\vartheta[ABCP]}.$$

Demnach ist

$$\frac{b}{a} = -\binom{K}{P}\frac{\vartheta^2[K]}{\vartheta^2[KP]}$$

und folglich

$$(8.)\quad |D_\beta \vartheta[A_\alpha](u)| = \varepsilon\pi^3\left(\vartheta^2[KP]\,\Pi\,\vartheta[B_\alpha](u) - \binom{K}{P}\vartheta^2[K]\,\Pi\,\vartheta[B_\alpha P](u)\right).$$

Aus der Formel (7.) ergiebt sich dann, dass $\varepsilon = \pm 1$ ist.

§ 6.

$\varrho = 4.$

Ich schliesse mit einigen Bemerkungen über den Fall $\varrho = 4$. Sei $A_1, \dots A_5, B_1, \dots B_5$ ein Fundamentalsystem von zehn geraden Charakteristiken, und seien $A, A_6, \dots A_{15}$ die wesentlichen Combinationen der A_α, und $B, B_6, \dots B_{15}$ die der B_α, speciell $A = A_1 \dots A_5$ und $B = B_1 \dots B_5$, also $A \equiv B$. Dann sind A und B gerade, dagegen $A_6, \dots A_{15}, B_6, \dots B_{15}$ ungerade. Nach Formel (3.) § 2 ist

$$\Sigma(AA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](u+v)(u-v)(u'+v')(u'-v')$$
$$= \Sigma(AB_\lambda)\vartheta[B_\lambda](u+v')(u-v')(u'+v)(u'-v),$$

wo sich λ von 0 bis 15 bewegt. Setzt man $u' = v' = u$, so ergiebt sich daraus

$$\Sigma(AA_\lambda)\vartheta[A_\lambda](0)(2u)(u+v)(u-v) = \Sigma(AB_\lambda)\vartheta[B_\lambda](0)(2u)(u+v)(u-v),$$

wo sich λ nur von 0 bis 5 bewegt. Da aber die dem Werthe $\lambda = 0$ entsprechenden Glieder auf beiden Seiten übereinstimmen, so braucht sich λ nur von 1 bis 5 zu bewegen. Setzt man in dieser Formel $v = u + AB_1$,

*) Dass dann (für $\varrho = 3$) stets ABC gerade ist, hat schon *Riemann* (Ges. Werke S. 468) angegeben.

so erhält man

$$\Sigma \binom{A_\lambda}{A}\binom{B_1}{A_\lambda} \vartheta[A_\lambda](0)(u)\,\vartheta[A_\lambda A B_1](0)(u) = \binom{B_1}{A} \vartheta[B_1](0)(u)\,\vartheta[A](0)(u).$$

Sei jetzt in abgeänderter Bezeichnung $A_1, \dots A_4$, $B_1, \dots B_6$ ein Fundamentalsystem von vier ungeraden und sechs geraden Charakteristiken und sei

$$P = \Sigma B_\gamma \equiv \Sigma A_\alpha.$$

Dann bilden

$$A_\alpha B_1 B_2, \quad B_1, \quad B_2, \quad B_3 P, \dots B_6 P$$

ein Fundamentalsystem von zehn geraden Charakteristiken. Man kann daher in der obigen Formel

$$A_\alpha, \quad A_5, \quad B_1, \quad A$$

durch

$$A_\alpha B_1 B_2, \quad B_3 P, \quad B_2, \quad B_3$$

ersetzen. Dann findet man

$$\Sigma \binom{A_\alpha B_1}{B_3}\binom{B_2}{B_1 A_\alpha} \vartheta[A_\alpha B_1 B_2](0)(u)\,\vartheta[A_\alpha B_1 B_3](0)(u)$$
$$-\vartheta[B_2](0)(u)\,\vartheta[B_3](0)(u) + \binom{B_2}{P}\binom{P}{B_3} \vartheta[B_2 P](0)(u)\,\vartheta[B_3 P](0)(u) = 0.$$

Vermehrt man u um $B_1 B_3$, so ergiebt sich daraus

$$\Sigma \binom{B_1 B_2 B_3}{A_\alpha} \vartheta[A_\alpha B_1 B_2]\,\vartheta[A_\alpha B_1 B_3]\,\vartheta[A_\alpha B_2 B_3](u)\,\vartheta[A_\alpha](u)$$
$$-\vartheta[B_2]\,\vartheta[B_3]\,\vartheta[B_1](u)\,\vartheta[B_1 B_2 B_3](u)$$
$$-(P)\,\vartheta[B_2 P]\,\vartheta[B_3 P]\,\vartheta[B_1 P](u)\,\vartheta[B_4 B_5 B_6](u) = 0.$$

Durch Vergleichung der Glieder erster Ordnung erhält man demnach

$$\sum_\alpha \binom{B_1 B_2 B_3}{A_\alpha} \vartheta[A_\alpha B_2 B_3]\,\vartheta[A_\alpha B_3 B_1]\,\vartheta[A_\alpha B_1 B_2]\,D_\beta \vartheta[A_\alpha]$$
$$-\vartheta[B_1]\,\vartheta[B_2]\,\vartheta[B_3]\,D_\beta \vartheta[B_1 B_2 B_3] - (P)\,\vartheta[B_1 P]\,\vartheta[B_2 P]\,\vartheta[B_3 P]\,D_\beta \vartheta[B_4 B_5 B_6] = 0.$$

Ebenso ist

$$\sum_\alpha \binom{B_4 B_5 B_6}{A_\alpha} \vartheta[A_\alpha B_5 B_6]\,\vartheta[A_\alpha B_6 B_4]\,\vartheta[A_\alpha B_4 B_5]\,D_\beta \vartheta[A_\alpha]$$
$$-(P)\,\vartheta[B_4 P]\,\vartheta[B_5 P]\,\vartheta[B_6 P]\,D_\beta \vartheta[B_1 B_2 B_3] - \vartheta[B_4]\,\vartheta[B_5]\,\vartheta[B_6]\,D_\beta \vartheta[B_4 B_5 B_6] = 0.$$

Diese Gleichungen liefern zwei verschiedene Lösungen der vier linearen Gleichungen

$$\sum_\alpha D_\beta \vartheta[A_\alpha].x_\alpha + D_\beta \vartheta[B_1 B_2 B_3].x_5 + D_\beta \vartheta[B_4 B_5 B_6].x_6 = 0 \qquad (\beta = 1, \dots 4)$$

zwischen den sechs Unbekannten $x_1, \dots x_6$. Bekanntlich verhalten sich die aus den Coefficienten der Gleichungen gebildeten Determinanten vierten

Grades, wie die aus den Elementen der Lösungen gebildeten Determinanten zweiten Grades (dieses Journal Bd. 82, S. 237). Aus den beiden obigen Gleichungen folgt daher, dass

$$(1.)\qquad [A_1, A_2, A_3, A_4] = \varepsilon\pi^4(\Pi\vartheta[B_\gamma]-\Pi\vartheta[B_\gamma P])$$

ist, wo ε ein Proportionalitätsfactor ist, der abgesehen vom Vorzeichen ungeändert bleibt, wenn $A_1, \dots A_4$ durch irgend vier andere der sechs Charakteristiken $A_1, \dots A_4$, $B_1B_2B_3$, $B_4B_5B_6$ ersetzt werden und jedesmal für die B_γ sechs gerade Charakteristiken gesetzt werden, welche die gewählten vier ungeraden Charakteristiken zu einem Fundamentalsystem ergänzen. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel findet man, dass ε^2 für jedes Fundamentalsystem von vier ungeraden Charakteristiken A_α und sechs geraden B_γ den nämlichen Werth hat. Es liegt daher die Vermuthung nahe, dass ε von den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ unabhängig ist. Indessen ist es mir noch nicht gelungen, einen Beweis dafür zu finden.

Zürich, Juni 1884.

Reduction der Gleichung des Tetraedroids auf die Form $\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta} = 0$.

(Von Herrn *Fritz Hofmann* in München.)

Die Gleichung des Tetraedroids sei in homogenen Coordinaten X, Y, Z, W:

$$\begin{vmatrix} 0 & X^2 & Y^2 & Z^2 & W^2 \\ X^2 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ Y^2 & a_{12}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ Z^2 & a_{13}^2 & a_{23}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ W^2 & a_{14}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man bezeichne zur Abkürzung $\sqrt{-\frac{a_{23}a_{34}}{a_{12}a_{14}}}$ mit R und setze:

$$a = \frac{2a_{14}a_{12}}{a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}}R, \quad f = \frac{a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}}{-2a_{23}a_{34}}R,$$

$$b = -\frac{a_{12}}{a_{23}}R, \qquad g = \frac{a_{14}}{a_{34}}R,$$

$$c = \frac{-a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}}{2a_{23}a_{34}}R, \quad h = \frac{-2a_{14}a_{12}}{-a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}}R,$$

$$\begin{aligned}
x &\equiv -a_{14}(a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23})\cdot\{a_{34}Y-a_{24}Z+a_{23}W\},\\
y &\equiv 2a_{14}a_{23}a_{24}\cdot\{-a_{34}X+a_{14}Z+a_{13}W\},\\
z &\equiv 2a_{14}a_{23}a_{34}\cdot\{a_{24}X-a_{14}Y+a_{12}W\},\\
\xi &\equiv -2a_{14}a_{23}a_{34}\cdot\{-a_{24}X-a_{14}Y+a_{12}W\},\\
\eta &\equiv 2a_{14}a_{24}a_{34}\cdot\{-a_{23}X+a_{13}Y-a_{12}Z\},\\
\zeta &\equiv -a_{14}(-a_{12}a_{34}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})\cdot\{a_{34}Y+a_{24}Z+a_{23}W\}.
\end{aligned}$$

Dann bestehen die von Herrn *Cayley* (dieses Journal Bd. 94, p. 270) geforderten Identitäten:

$$af = bg = ch = 1, \quad x+y+z+\xi+\eta+\zeta = 0, \quad ax+by+cz+f\xi+g\eta+h\zeta = 0.$$

Ferner sind (vergl. *Cayley*, dieses Journal Bd. 65, p. 287, wo die Ebenen mit p, q, r, p_2, q_2, r_2 bezeichnet sind) die sechs Ebenen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ sechs singuläre Tangentialebenen des Tetraedroids; mithin kann die Gleichung dieses letzteren in die Gestalt gesetzt werden

$$\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta} = 0.$$

Die Ermittelung *aller* ähnlichen Reductionen ist eine neue Aufgabe.

München, im März 1884.

Zur Theorie der Bewegung starrer räumlicher Systeme.

(Von Herrn *Artur Schoenflies* in Göttingen.)

Wenn ein unveränderliches räumliches System eine ganz beliebige Ortsveränderung erleidet, so kann es bekanntlich vermittelst einer bestimmten Schraubenbewegung aus der Anfangslage in die Endlage übergeführt werden. Die geometrischen Beziehungen beider Lagen zu einander und die Gesetze der ihnen entsprechenden Bewegung sind zuerst von *Chasles* in zwei fundamentalen Abhandlungen eingehend untersucht worden, und zwar sowohl, wenn das System eine endliche*), als auch wenn es eine unendlich kleine**) Verschiebung erleidet. Die *Chasles*schen Resultate haben in neuerer Zeit durch Herrn *Lindemann****) eine Verallgemeinerung gefunden für den Fall, dass die dem Raume beigelegte Massbestimmung nicht die gewöhnliche, sondern eine projectivische ist. Aber auch unter Beibehaltung der gewöhnlichen Massbestimmung ist noch eine Erweiterung der *Chasles*schen Theorie möglich. Die von *Chasles* gegebenen Sätze beziehen sich nämlich nur auf den Fall, dass der starre Körper eine einzige Lagenveränderung, d. h. eine einzige Schraubenbewegung auszuführen hat. Dagegen ist die Aufgabe, drei und mehr auf einander folgende beliebige Lagen desselben zu betrachten, soweit mir bekannt, bisher noch nicht allgemein in Angriff genommen worden. Die nachstehenden Untersuchungen haben den Zweck, sich mit der genannten Aufgabe zu beschäftigen; ich werde die Lagen des starren räumlichen Systems als ganz beliebige annehmen, so dass die Verschie-

*) Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable. Comptes rendus, Bd. 51 u. 52.

**) Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. Comptes rendus, Bd. 16. S. 1420—1432.

***) Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. Math. Annalen, Bd. 7. S. 56.

bungen, durch welche das System aus der einen Lage in die folgende übergeführt werden kann, von endlicher Grösse sind und um discrete Schraubenaxen stattfinden. Die Resultate, welche ich ableiten werde, lassen alsdann eine doppelte Anwendung zu. Erstens können sie auch als Eigenschaften der speciellen tetraedralen Liniencomplexe ausgesprochen werden, welche durch Beziehung von congruenten Räumen auf einander erzeugt werden; zweitens aber — und dies dürfte vielleicht noch wichtiger sein — gehen sie, wenn man die auf einander folgenden Verschiebungen, resp. Schraubenbewegungen als unendlich klein voraussetzt, in Theoreme über die Krümmung der Bahnen über, welche von den Punkten eines beliebig bewegten starren Körpers beschrieben werden. Einzelne Probleme über die Krümmungsverhältnisse dieser Bahncurven sind übrigens auch schon von anderer Seite der Behandlung unterworfen worden; und zwar sind hierüber besonders zu erwähnen die bezüglichen Untersuchungen der Herren *Mannheim* *), *Burmester* **) und *Mehmke* ***). Auch in einer analytisch gehaltenen Abhandlung des Herrn *Jordan* †) finden sich einige hierher gehörige Resultate.

Während die beiden oben angeführten Arbeiten von *Chasles* sich ausschliesslich mit der Bewegung von starren, unveränderlichen Systemen beschäftigen, hat man in neuerer Zeit eine Methode ausgebildet, welche die Bewegung starrer Systeme gleichzeitig mit den entsprechenden Problemen für veränderliche Systeme zu behandeln gestattet. Diese Methode wurde von Herrn *Burmester* in der genannten Abhandlung zuerst angewandt. Ich werde mich jedoch im Folgenden wiederum direct an *Chasles* selbst anschliessen. Dies geschieht aus einem doppelten Grunde. Einerseits, um die besonderen Beziehungen nicht zu verlieren, welche in der starren Unveränderlichkeit des bewegten Systems liegen, und andrerseits, weil sich aus den Sätzen, die *Chasles* aufgestellt hat, unmittelbar ein fundamentales

---

*) Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace. Comptes rendus, Bd. 76. S. 551 u. 635.

**) Kinematisch geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 23. S. 108.

***) Ueber den geometrischen Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung in einer Phase eines starren oder affin veränderlichen Systems. Civilingenieur, Bd. 29.

†) Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace. Bulletin de la société mathématique de France. Bd. I. S. 144.

Resultat ergiebt, welches mit Leichtigkeit gestattet, eine einheitliche Behandlung des vorliegenden Gegenstandes zu geben.

1. Es seien Σ, Σ_1, Σ_2, ... verschiedene Lagen desselben starren Systems, so lässt sich, wie *Chasles* zuerst gezeigt hat, das System Σ durch eine Schraubenbewegung von bestimmtem Parameter und bestimmter Axe in die Lage Σ_1 überführen, ebenso Σ_1 nach Σ_2 u. s. w. Ist nun P ein beliebiger Punkt von Σ, ist P^m der Halbirungspunkt der Strecke $\overline{PP_1}$, und Σ^m das von den Punkten P^m gebildete räumliche System, so bestehen die Sätze, dass jeder Geraden g von Σ wieder eine Gerade g^m von Σ^m entspricht, und ebenso jeder Ebene ε eine Ebene ε^m, d. h. die beiden Systeme Σ und Σ^m sind zu einander collinear, und da sie überdies die unendlich ferne Ebene entsprechend gemein haben, so sind sie sogar affin. Errichtet man ferner in P^m auf der Geraden $\overline{PP_1}$ die Normalebene π^v, so bilden, wie ebenfalls aus der *Chasles*schen Abhandlung hervorgeht, die Ebenen π^v mit den Punkten P^m ein Nullsystem. Denn liegen die Punkte P^m auf einer Ebene ε^m, so schneiden sich die zu ihnen gehörigen Normalebenen sämmtlich in einem Punkte von ε^m, dessen Normalebene ε^m selbst ist. Demnach ist das System Σ^v der Normalebenen π^v dem System Σ^m, also auch dem System Σ der Punkte P reciprok zugeordnet. Errichtet man ebenso im Mittelpunkte P_1^m der Strecke $\overline{P_1P_2}$ die Normalebene π_1^v, so bilden auch die Ebenen π_1^v mit den Punkten P_1^m ein Nullsystem, d. h. das System Σ_1^v ist reciprok zum System Σ_1. Da nun die Systeme Σ und Σ_1 einander congruent sind, so folgt: — und diese Thatsache scheint, soweit mir bekannt, von den Geometern bisher nicht beachtet worden zu sein — die Systeme Σ^v und Σ_1^v sind zu einander collinear. Je zwei entsprechende Normalebenen π^v und π_1^v von Σ^v und Σ_1^v schneiden sich aber in einer Geraden, welche durch den Mittelpunkt des dem Dreieck $\overline{PP_1P_2}$ umschriebenen Kreises geht, und auf der Ebene desselben senkrecht steht. Diese Gerade will ich die Mittelpunktsaxe k des Punktes P nennen; alsdann folgt, dass *die sämmtlichen zu den Punkten P gehörigen Mittelpunktsaxen k einen allgemeinen tetraedralen Strahlencomplex bilden.*

Werden die Verschiebungen, welche das System Σ erleidet, unendlich klein, so geht diese Gerade k in die Krümmungsaxe der von P beschriebenen Bahn über, so dass alle für die Geraden k gefundenen Sätze sich ohne Weiteres von den Krümmungsaxen der von den Punkten des Systems beschriebenen Bahncurven aussprechen lassen.

2. *Der eben aufgefundene Complex wird im Allgemeinen weder reelle Hauptebenen, noch reelle Hauptpunkte enthalten,* weil zwei einander zugeordnete Normalebenen π^ν und π_1^ν im Allgemeinen nicht zusammenfallen können. Soll dies nämlich möglich sein, so muss, da π^ν durch P^m geht, und auf $\overline{PP_1}$ senkrecht steht, und ebenso π_1^ν durch P_1^m geht und auf $\overline{P_1P_2}$ senkrecht steht, P mit P_2 zusammenfallen, was eben nur unter besonderen Bedingungen eintreten kann. Wenn nun in Wirklichkeit die homologen Punkte P und P_2 in einander liegen, so sind die Systeme Σ und Σ_2 als zwei Lagen desselben Körpers zu betrachten, welche einen festen Punkt gemeinsam haben; alsdann lässt sich, wie bekannt, Σ stets durch Drehung um eine durch P gehende Axe p in die Lage Σ_2 bringen, d. h. Σ und Σ_2 haben in diesem Fall eine Gerade p Punkt für Punkt entsprechend gemein. Mithin fällt jeder Punkt Q dieser Geraden mit dem homologen Punkt Q_2 zusammen, also auch Q^m mit Q_1^m und die Normalebene $\varkappa^\nu$ mit $\varkappa_1^\nu$; d. h. die beiden collinearen Räume Σ^ν und Σ_1^ν haben in diesem Fall eine Punktreihe und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein. Wenn endlich Σ^ν und Σ_1^ν noch eine weitere Hauptebene ϱ^ν enthalten, die nicht dem eben genannten Ebenenbüschel angehört, so ergiebt sich in derselben Weise, dass auch der Punkt R mit R_2 zusammenfällt; alsdann liegen aber je zwei entsprechende Punkte von Σ und Σ_2 in einander, d. h. Σ^ν und Σ_1^ν haben alle ihre Ebenen und Punkte entsprechend gemein.

Es giebt noch einen Ausnahmefall, der besonders erwähnt werden muss, nämlich denjenigen, in welchem die unendlich ferne Ebene eine Hauptebene von Σ^ν und Σ_1^ν ist. Die unendlich ferne Ebene ist stets die Normalebene des unendlich fernen Punktes der Schraubenaxe; soll sie also eine selbstentsprechende Ebene von Σ^ν und Σ_1^ν sein, so müssen die Axen der beiden auf einander folgenden Verschiebungen parallel sein, oder auch zusammenfallen. Umgekehrt ist ebenfalls klar, dass wenn die beiden Schraubenaxen parallel sind, die unendlich ferne Ebene eine selbstentsprechende Ebene der beiden von den Normalebenen gebildeten collinearen Räume ist. Sind dagegen die Axen x und y_1 der auf einander folgenden Verschiebungen nicht parallel, so ist die unendlich ferne Ebene für die erste Verschiebung Normalebene des unendlich fernen Punktes der Axe x, dagegen für die zweite Verschiebung Normalebene des unendlich fernen Punktes von y_1, während die Normalebene des unendlich fernen Punktes von x, wie die Normalebene eines jeden unendlich fernen Punktes, zu y_1 parallel ist.

Diesen Ausnahmefall habe ich besonders angeführt, weil er uns an anderer Stelle wieder begegnen wird.

3. Der von den Geraden k gebildete Strahlencomplex lässt sich bekanntlich in einfacher Weise auf das räumliche System Σ projectivisch abbilden, und zwar so, dass jedem Complexstrahl k der zugehörige Punkt P von Σ entspricht. Von den vielen Folgerungen, welche sich daraus ergeben, mögen die nachstehenden angeführt werden.

Die zu den Punkten einer Geraden g gehörigen Mittelpunktsaxen k bilden im Allgemeinen die eine Regelschaar eines einfachen Hyperboloids. Sie ist das Erzeugniss der beiden projectivischen Ebenenbüschel, deren Axen die zu g reciproken Geraden g^v und g_1^v sind.

Die zu den Punkten einer beliebigen Ebene π zugehörigen Geraden k bilden im Allgemeinen die sämmtlichen Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung. Sie sind das Erzeugniss der beiden collinearen Ebenenbündel, deren Scheitel die Nullpunkte der Ebenen π^m und π_1^m sind.

Ferner bilden diejenigen Geraden k, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen, im Allgemeinen einen Kegel zweiten Grades. Derselbe wird von zwei projectivischen Ebenenbüscheln erzeugt, deren Axen g^v und g_1^v sich in dem genannten Punkte schneiden. Daher liegen die Punkte von Σ, welche jenen Geraden k entsprechen, auf der zu g^v reciproken Geraden g.

Diejenigen Geraden k, welche in einer beliebigen Ebene des Raumes enthalten sind, umhüllen im Allgemeinen einen Kegelschnitt, und die Ebenen von Σ^v, welche sich mit den zugehörigen Ebenen von Σ_1^v in diesen Axen schneiden, bilden einen Ebenenbüschel dritter Ordnung. Ist nämlich ε^v eine beliebige Ebene von Σ^v, so erzeugt dieselbe mit ε_1^v einen Ebenenbüschel dritter Ordnung, welcher ε^v und ε_1^v enthält. Dieser Ebenenbüschel wird im Allgemeinen nicht zerfallen; dies kann nur eintreten, wenn ε^v und ε_1^v einen Punkt, resp. eine Gerade entsprechend gemein haben. Betrachtet man denselben als einen Büschel des Systems Σ_1^v und bezeichnet die Ebene ε^v als Ebene von Σ_1^v durch η_1^v, so entspricht ihm im System Σ^v ein Büschel, der von den Ebenen η^v und ε^v gebildet wird. Je zwei homologe Ebenen dieser beiden Büschel schneiden sich alsdann in je einer Geraden k, welche in der Ebene ε^v liegt. Nun entspricht einem Ebenenbüschel, der die Ebenen ε^v und η^v enthält, im System Σ eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch diejenigen Punkte E und H hindurchgeht, deren Normalebenen ε^v und

η^{ν} sind; d. h. die Punkte von Σ, zu denen die in ε^{ν} liegenden Geraden k gehören, bilden im Allgemeinen eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die eben bestimmten Punkte E und H hindurchgeht.

Die vorstehenden Sätze erleiden leicht anzugebende Modificationen, wenn einer der oben erwähnten Ausnahmefälle eintritt; ich unterlasse es, auf dieselben näher einzugehen.

4. Wird für die eben betrachtete Ebene ε^{ν} die unendlich ferne Ebene gesetzt, so bilden, da die unendlich ferne Ebene im Allgemeinen keine selbstentsprechende Ebene von Σ^{ν} und Σ_1^{ν} ist, die in ihr liegenden Geraden k im Allgemeinen einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung und die zugehörigen Punkte P von Σ eine Raumcurve dritter Ordnung. Für jeden Punkt P dieser Curve i^3 sind aber die beiden zugehörigen Normalebenen einander parallel, er hat also die Eigenschaft, dass für ihn drei auf einander folgende Lagen P, P_1, P_2 auf derselben Geraden liegen. Beachtet man noch, dass die unendlich ferne Ebene Normalebene des unendlich fernen Punktes der Schraubenaxe ist, dass also die Punkte E und H die unendlich fernen Punkte der beiden Schraubenaxen sind, so folgt:

Alle Punkte des starren Systems, für welche drei auf einander folgende Lagen in derselben Geraden liegen, bilden im Allgemeinen eine Raumcurve i^3 dritter Ordnung. Dieselbe geht durch die unendlich fernen Punkte der beiden Geraden des Systems, um welche die beiden Schraubenbewegungen, die dasselbe erleidet, stattfinden.

Die Curve wird demnach im Allgemeinen eine räumliche Hyperbel sein.

Solange die Raumcurve i^3 nicht zerfällt, können auf einer beliebigen Geraden höchstens zwei Punkte existiren, für welche die drei Lagen P, P_1, P_2 eine gerade Linie bilden. Für eine solche Gerade haben die beiden Paraboloide, welche von den Verbindungslinien $\overline{PP_1}$, resp. $\overline{P_1P_2}$ gebildet werden, zwei Erzeugende gemein, woraus noch beiläufig folgt, dass die Schnittcurve dieser Paraboloide in vier gerade Linien zerfällt. Die Gesammtheit aller Geraden dieser Art bildet ein Strahlsystem erster Ordnung und dritter Klasse, nämlich das Secantensystem der Raumcurve i^3.

Wie oben gezeigt wurde, bilden die Mittelpunktsaxen, welche zu den Punkten einer beliebigen Geraden g gehören, die eine Regelschaar eines Hyperboloids. Besitzt die Gerade g einen Punkt der betrachteten Art, so geht die Regelschaar in ein Paraboloid über. Enthält g zwei der-

artige Punkte, so liegen zwei Geraden k im Unendlichen, d. h. zwei Paare entsprechender Normalebenen der Büschel g^v und g_1^v sind parallel. Daher sind g^v und g_1^v selbst parallel, die Geraden k bilden daher eine Cylinderfläche, und zwar eine hyperbolische, elliptische oder parabolische, je nachdem die Gerade g eine eigentliche Secante, eine uneigentliche Secante oder eine Tangente der Raumcurve i^3 ist.

5. Die soeben gewonnenen Resultate verlieren ihre Gültigkeit, wenn die unendlich ferne Ebene eine selbstentsprechende Ebene von Σ^v und Σ_1^v ist, d. h. wenn die beiden auf einander folgenden Schraubenaxen x und y_1 parallel sind. Während sich die Raumcurve i^3 als Erzeugniss zweier collinearen Strahlenbündel ergab, deren Scheitel die unendlich fernen Punkte der beiden windschiefen Axen x und y_1 sind, erhält man in diesem Fall die Punkte P der betrachteten Art durch zwei collineare Strahlenbündel, deren Scheitel in den unendlich fernen Punkten zweier parallelen Geraden liegen. Demnach reducirt sich der Ort derjenigen dieser Punkte, welche im Endlichen liegen, auf eine Gerade, welche selbst zu den Axen der Schraubenbewegungen parallel ist.

Es lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass wenn die Raumcurve i^3 zerfällt, die Axen der beiden Schraubenbewegungen parallel sein müssen. Denn wenn i^3 zerfallen soll, so muss es eine Gerade g von der Eigenschaft geben, dass für alle Punkte derselben drei auf einander folgende Lagen in derselben Geraden liegen. Nun bilden die Verbindungslinien der Punkte P und P_1 einer beliebigen Geraden im Allgemeinen die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids; dies enthält in dem hier betrachteten Fall drei Lagen g, g_1, g_2 der Geraden g, und zwar werden diese drei Geraden von allen Geraden der Regelschaar in congruenten Punktreihen getroffen. Es kann aber kein eigentliches Paraboloid existiren, für welches dies zutrifft. Denn je zwei Geraden einer Regelschaar eines Paraboloids, welche von allen Erzeugenden der andern Schaar in congruenten Punktreihen getroffen werden, sind gleich geneigt gegen die Richtungsebene dieser Schaar, und solcher Geraden kann es nur zwei geben. Demnach liegen die Verbindungslinien der homologen Punkte von g und g_1 sämmtlich in einer Ebene, und daraus folgt wieder, dass sie zu einander parallel sind, da es ja sonst nur zwei Punkte der betrachteten Art auf der Geraden g geben kann. Aber jede Gerade, für welche die Verbindungslinien $\overline{PP_1}$ sämmtlich zu einander parallel sind, ist zur Axe der Schraubenbewegung

parallel, also muss g mit der Axe x selbst parallel laufen. Beachtet man nun, dass die Verbindungslinien $\overline{PP_1}$ der Punkte von g und g_1 mit den Verbindungslinien $\overline{P_1P_2}$ der Punkte von g_1 und g_2 identisch sind, so folgt ebenso, dass auch die Gerade g_1 der Schraubenaxe y_1 parallel ist, d. h. die beiden Axen x und y_1 sind selbst parallel. Demnach ergiebt sich:

Wenn eine Gerade existirt, deren sämmtliche Punkte die Eigenschaft haben, dass die drei Lagen P, P_1, P_2 in einer Geraden liegen, so sind die beiden Axen x und y_1, um welche die beiden Schraubenbewegungen stattfinden, einander parallel, und umgekehrt: Sind die Axen x und y_1 zu einander parallel, so existirt eine derartige Gerade.

Die Lage dieser Geraden lässt sich folgendermassen bestimmen: Man betrachte alle Punkte, für welche P, P_1, P_2 eine zu x parallele Ebene bilden. Diese Punkte genügen sämmtlich der Bedingung, dass die Projectionen von $\overline{PP_1}$ und $\overline{P_1P_2}$ auf eine zu x senkrechte Ebene eine gerade Linie bilden. Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$r^{(m)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega + r_1^{(m)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega_1 = u\cos\alpha,$$
$$r_1^m - r^m = u\sin\alpha,$$

wenn $r^{(m)}$, $r_1^{(m)}$ die Abstände der Geraden g^m, g_1^m von x resp. y_1 sind, u die Entfernung von x und y_1, ω und ω_1 die Rotationscomponenten der Schraubenbewegungen, und α der Winkel, welchen $r^{(m)}$ und $r_1^{(m)}$ mit der Normale der Ebene $\overline{xy_1}$ bilden. Unter diesen Punkten liegen nun diejenigen auf der Geraden g, für welche $\overline{PP_1}$ und $\overline{P_1P_2}$ dieselbe Neigung gegen die Axe x besitzen; dies liefert die weitere Gleichung

$$\frac{e}{r^{(m)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega} = \frac{e_1}{r_1^{(m)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega_1},$$

wo e und e_1 die Gleitungscomponenten der Schraubenbewegung bedeuten. Durch diese drei Gleichungen ist die Lage der Geraden g vollständig bestimmt. Bezeichnet man noch die Grösse $e:\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$ durch p, so lassen sich die ersten beiden Gleichungen in folgende

$$\frac{r^{(m)}}{\cos\alpha} = \frac{u}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{e}{e+e_1} = d,$$
$$\frac{r^{(m)}}{\sin\alpha} = u\cdot\frac{p}{p_1-p} = d_1$$

überführen. Dieselben zeigen, dass die Gerade g die Schnittlinie zweier Rotationscylinderflächen ist, von denen die eine d zum Durchmesser hat und die Ebene der beiden Schraubenaxen berührt, während die andere d_1

zum Durchmesser und die Ebene $\overline{xy_1}$ zur Durchmesserebene hat. ***Diese beiden Cylinderflächen sind das genaue Analogon der beiden Kreise, welche Bresse für die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene gefunden hat.***

6. Während es unendlich viele Punkte giebt, für welche drei auf einander folgende Lagen derselben Geraden angehören, wird es im Allgemeinen keinen im Endlichen liegenden Punkt geben, für den auch noch die vierte Lage, P_3, auf der Geraden $\overline{PP_1P_2}$ bleibt. Ist nämlich Σ_3 das starre System in der vierten Lage, so gehört zu Σ_1, Σ_2, Σ_3 eine Raumcurve i_1^3 als Ort aller Punkte, für welche P_1, P_2, P_3 eine Gerade bilden. Wie bewiesen, lässt sich die Raumcurve i^3 als Erzeugniss von zwei collinearen Bündeln betrachten, deren Mittelpunkte in den unendlich fernen Punkten von x und y_1 liegen; ebenso erscheint die Raumcurve i_1^3 als Erzeugniss von zwei collinearen Bündeln, deren Mittelpunkte in den unendlich fernen Punkten der Schraubenaxen y_1 und z_2 liegen. Die beiden Raumcurven i^3 und i_1^3 haben daher im Allgemeinen nur den unendlich fernen Punkt der Geraden y_1 gemein; sie haben nur in dem Falle noch andere gemeinsame Punkte, wenn irgend drei entsprechende Strahlen der drei collinearen Bündel sich in einem und demselben Punkte schneiden, was im Allgemeinen nicht einzutreten braucht. Hiermit wird ein Satz modificirt, welcher sich in einer kürzlich von mir veröffentlichten Arbeit über unendlich kleine Bewegungen starrer Systeme findet, vgl. Sur la courbure des lignes etc., Mémoires de la société royale des sciences de Liège. Série 2, Bd. XI, § 6 u. 7. Nur unter der ganz besonderen Bedingung, dass bei der Bewegung des Systems ein oder zwei Punkte desselben feste Gerade zu durchlaufen haben, giebt es Schnittpunkte der Curven i^3 und i_1^3. Uebrigens will ich hier noch ausdrücklich darauf hinweisen, dass die betrachteten Gebilde zum Theil als Elemente des beweglichen Systems, zum Theil als Elemente des absoluten Raumes zu betrachten sind. Z. B. gehören die Curven i^3 und i_1^3, ferner die sie erzeugenden collinearen Bündel dem beweglichen System an; dagegen sind die Ebenenbüschel, gebildet von ε^ν und ε_1^ν, u. s. w., als Elemente des absoluten Raumes anzusehen.

7. Es mögen wiederum Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3 vier verschiedene Lagen des starren Systems sein, und zwar soll ausdrücklich vorausgesetzt werden, dass die Axen der zugehörigen Schraubenbewegungen ganz beliebige Lage im Raume haben. Ferner seien wieder Σ^ν, Σ_1^ν, Σ_2^ν die drei entsprechenden Systeme der Normalebenen, so schneiden sich je drei homologe Normal-

ebenen π^{v}, π_1^{v}, π_2^{v} in einem Punkte P^c, welcher von P, P_1, P_2, P_3 gleichen Abstand hat, also der Mittelpunkt einer Kugel ist, welche durch die vier Lagen P, P_1, P_2, P_3, hindurchgeht. Es ist demnach jedem Punkt P von Σ im Allgemeinen ein Punkt P^c zugeordnet, und die Punkte P^c bilden ein räumliches System Σ^c. Es ist aber auch umgekehrt, wie sich unmittelbar ergiebt, jedem Punkt P^c im Allgemeinen ein bestimmter Punkt von Σ zugeordnet. Die Systeme Σ und Σ^c stehen also in einer eindeutigen Verwandtschaft zu einander. Welcher Art diese Verwandtschaft ist, ergeben die folgenden Sätze.

Liegen die Punkte P von Σ auf einer Geraden g, so bilden die Mittelpunkte der ihnen entsprechenden Kugeln eine Raumcurve dritter Ordnung. Dieselbe ist das Erzeugniss der drei projectivischen Ebenenbüschel, deren Axen die zu g reciproken Geraden g^{v}, g_1^{v}, g_2^{v} sind.

Liegen die Punkte P von Σ auf einer Ebene ε, so bilden die Mittelpunkte der ihnen entsprechenden Kugeln eine Fläche dritter Ordnung. Dieselbe ist das Erzeugniss der drei collinearen Ebenenbündel, deren Scheitel die Nullpunkte der Ebenen ε^{m}, ε_1^{m}, ε_2^{m} sind.

Bilden die Punkte P^c von Σ^c eine Gerade g^c, so bilden die ihnen zugeordneten Punkte P von Σ eine Raumcurve dritter Ordnung. Denn sei ε eine beliebige Ebene von Σ, so liegen die zugehörigen Punkte P^c, wie eben bewiesen, auf einer Fläche dritter Ordnung. Es liegen daher drei Punkte dieser Fläche auf der Geraden g^c, d. h. es giebt in jeder Ebene drei Punkte P, für welche die zugehörigen Punkte P^c auf g^c liegen.

Bilden die Punkte P^c von Σ^c eine Ebene ε^c, so liegen die ihnen zugeordneten Punkte P von Σ auf einer Fläche dritter Ordnung. Denn ist g eine beliebige Gerade von Σ, so befinden sich die Punkte P^c, welche den Punkten von g entsprechen, auf einer Raumcurve dritter Ordnung; es giebt daher drei Punkte der Geraden g, für welche die entsprechenden Punkte P^c auf ε^c liegen.

8. Lassen wir die Ebene ε^c ins Unendliche rücken, so haben die zugeordneten Punkte P von Σ die Eigenschaft, dass die vier Lagen P, P_1, P_2, P_3 in derselben Ebene enthalten sind. Demnach ergiebt sich:

Es giebt in dem räumlichen System Σ unendlich viele Punkte P von der Eigenschaft, dass die vier Lagen P, P_1, P_2, P_3 einer einzigen Ebene angehören. Die Gesammtheit derselben bildet im Allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung F^3. Auf derselben liegt auch die oben gefundene Raumcurve i^3.

Sowie die Fläche F^3 zu den Lagen Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3 des starren Systems gehört, so giebt es auch eine Fläche F_1^3, die zu den Lagen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 gehört, und die Curve i_1^3 enthält. Diese beiden Flächen schneiden sich in einer Raumcurve neunter Ordnung; dieselbe muss aber in die Curve i_1^3 und eine Raumcurve sechster Ordnung c^6 zerfallen. Denn die Curve i_1^3 enthält diejenigen Punkte, für welche P_1, P_2, P_3 eine Gerade bilden, für sie gehören aber ebenfalls P, P_1, P_2, P_3 derselben Ebene an. Daraus folgt, dass die Curve i_1^3 nicht allein auf F_1^3, sondern auch auf F^3 liegt; jede Fläche F^3 enthält demnach zwei auf einander folgende Curven i^3.

Von den Punkten der Curve c^6 lässt sich beweisen, dass für sie sogar die fünf Lagen P, P_1, P_2, P_3, P_4 derselben Ebene angehören. Denn es liegen sowohl P, P_1, P_2, P_3 in einer Ebene, als auch P_1, P_2, P_3, P_4; beide Ebenen haben also die Punkte $P_1 P_2 P_3$ gemein; und da dieselben, als Punkte von c^6, im Allgemeinen nicht in einer Geraden liegen, so müssen die beiden Ebenen zusammenfallen. Dies braucht jedoch nicht der Fall zu sein, wenn P_1, P_2, P_3 eine Gerade bilden. Dann werden vielmehr die beiden Ebenen im Allgemeinen verschieden sein und sich in der Geraden $\overline{P_1 P_2 P_3}$ schneiden; d. h.

Es giebt unendlich viele Punkte des starren Systems, für welche die fünf Lagen P, P_1, P_2, P_3, P_4 derselben Ebene angehören. Dieselben bilden im Allgemeinen eine Raumcurve sechster Ordnung c^6, welche zusammen mit i_1^3 den Durchschnitt der Flächen F^3 und F_1^3 darstellt.

Nehmen wir nun noch die Fläche F_2^3 hinzu, welche den Systemlagen Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 entspricht, so erhalten wir 27 Schnittpunkte. Jeder dieser 27 Punkte hat die Eigenschaft, dass für ihn je vier auf einander folgende Lagen derselben Ebene angehören. Von diesen 27 Punkten lehrt nun eine einfache Betrachtung, dass für alle diejenigen von ihnen, welche nicht auch auf i_1^3 oder i_2^3 liegen, die drei Ebenen, gebildet durch $\overline{P P_1 P_2 P_3}$, $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$, $\overline{P_2 P_3 P_4 P_5}$, zusammenfallen, d. h. für jeden dieser Punkte gehören sogar sechs auf einander folgende Lagen einer und derselben Ebene an. Ist nämlich P ein Punkt von i_1^3, so brauchen die Ebenen $\overline{P P_1 P_2 P_3}$ und $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$ nicht zusammenzufallen, da ihre drei gemeinsamen Punkte eine Gerade bilden, und ist P ein Punkt von i_2^3, so gilt dasselbe für die Ebenen $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$ und $\overline{P_2 P_3 P_4 P_5}$. In allen andern Fällen dagegen sind die drei betrachteten Ebenen identisch. Nun enthalten F^3 und F_1^3 die Curve i_1^3; dieselbe wird von F_2^3 in neun Punkten geschnitten, und diese neun Punkte sind den drei

Flächen gemeinsam; ebenso enthalten F_1^3 und F_2^3 die Curve i_2^3, und diese wird von F^3 auch in neun Punkten geschnitten, die allen drei Flächen gemeinsam sind; es bleiben also nur noch neun gemeinschaftliche Punkte der Flächen F^3, F_1^3, F_2^3, die weder auf i_1^3 noch auch auf i_2^3 liegen. Also folgt:

Es existiren im Allgemeinen neun Punkte des starren Systems, für welche sechs auf einander folgende Lagen $P, \ldots P_5$ derselben Ebene angehören.

Diese neun Punkte sind gleichzeitig die Schnittpunkte der Curven c^6 und c_1^6, woraus noch folgt, dass sich zwei auf einander folgende Curven c^6 im Allgemeinen in neun Punkten schneiden. Zu ihnen gehört z. B. jeder Punkt des starren Systems, der gezwungen ist, sich auf einer festen Ebene zu bewegen. Auf jeder Fläche F^3 liegen demnach je zwei Curven i^3 und je zwei Curven c^6. Die beiden Curven i^3 haben im Allgemeinen keinen Punkt gemein, dagegen schneiden sich die Curven c^6 im Allgemeinen in neun Punkten.

9. Auf der Fläche F^3 giebt es noch eine andere Curve sechster Ordnung, k^6, welche erwähnenswerth ist. Nämlich unter den Punkten des starren Systems, welche auf F^3 liegen, existiren im Speciellen noch solche, für welche die vier Lagen P, P_1, P_2, P_3 nicht allein derselben Ebene, sondern sogar demselben Kreise angehören. Für die Punkte dieser Art müssen die drei entsprechenden Normalebenen π^v, π_1^v, π_2^v sich in einer und derselben Geraden schneiden. Ist nun ε eine beliebige Ebene von Σ, so bilden die Normalebenen ihrer Punkte drei collineare Ebenenbündel, deren Scheitel die Nullpunkte von ε^m, ε_1^m, ε_2^m sind, die im Allgemeinen nicht zusammenfallen. Es giebt aber bekanntlich für drei collineare Ebenenbündel, deren Scheitel nicht zusammenfallen, im Allgemeinen sechs Geraden, in denen sich je drei homologe Ebenen der drei Bündel schneiden; also enthält auch die Ebene ε im Allgemeinen sechs Punkte der betrachteten Art. Demnach ergiebt sich:

Es giebt in dem starren System unendlich viele Punkte von der Eigenschaft, dass die vier auf einander folgenden Lagen P, P_1, P_2, P_3 demselben Kreise angehören. Dieselben bilden eine Raumcurve sechster Ordnung, k^6, welche auf der Fläche F^3 gelegen ist.

Dagegen wird es im Allgemeinen keine Punkte geben, für welche auch noch P_4 auf dem durch P, P_1, P_2, P_3 bestimmten Kreise liegt. Denn die beiden Raumcurven k^6 und k_1^6 haben im Allgemeinen keinen Punkt mit einander gemein.

10. Es sollen endlich noch vier auf einander folgende Systeme von Normalebenen Σ^ν, Σ_1^ν, Σ_2^ν, Σ_3^ν betrachtet werden, so bilden je vier homologe Ebenen π^ν, π_1^ν, π_2^ν, π_3^ν ein Tetraeder; es kann jedoch der Fall eintreten, dass sich dieselben in einem und demselben Punkt, nämlich in P^ν, schneiden. Ist nun g eine beliebige Gerade von Σ, so bilden die Normalebenen ihrer Punkte für die fünf auf einander folgenden Lagen von Σ vier projectivische Ebenenbüschel, deren Axen g^ν, g_1^ν, g_2^ν, g_3^ν sind. Es giebt aber bekanntlich im Allgemeinen je vier Ebenen eines jeden Büschels, welche sich mit den entsprechenden Ebenen der andern drei Büschel in einem und demselben Punkte schneiden. Demnach existiren auf der beliebigen Geraden g im Allgemeinen vier Punkte der betrachteten Art, nämlich diejenigen vier Punkte, welche den vier Ebenen des Büschels g^ν in Σ entsprechen. Diese Punkte sind dadurch charakterisirt, dass für sie fünf Lagen derselben Kugel angehören; also folgt:

Es giebt in dem starren System unendlich viele Punkte, welche die Eigenschaft besitzen, während fünf auf einander folgender Lagen auf einer und derselben Kugel zu bleiben. Dieselben bilden eine Fläche vierter Ordnung F^4.

Auf dieser Fläche F^4 liegt auch die oben genannte Raumcurve k^6. Denn da für jeden Punkt von k^6 vier auf einander folgende Lagen demselben Kreise angehören, so müssen sie mit der nächstfolgenden fünften Lage auf einer Kugel liegen.

Betrachten wir, analog wie oben (§ 8), die Schnittcurve 16. Ordnung der Flächen F^4 und F_1^4, so lässt sich zeigen, dass dieselbe in die Curve k_1^6 und eine Curve zehnter Ordnung k^{10} zerfallen muss. Denn die Curve k_1^6 enthält diejenigen Punkte P, für welche P_1, P_2, P_3, P_4 auf einem Kreise liegen; und diese Punkte besitzen gleichzeitig die Eigenschaft, dass P, P_1, P_2, P_3, P_4 einer und derselben Kugel angehören. Es folgt also, dass F^4 nicht allein die Curve k^6, sondern auch die nächstfolgende Curve k_1^6 enthält.

Die Punkte von k^{10} haben im Allgemeinen die Eigenschaft, während sechs auf einander folgender Lagen auf derselben Kugel zu bleiben. Denn es geht sowohl durch $P, \ldots P_4$, als auch durch $P_1, \ldots P_5$ je eine Kugel; beide Kugeln haben daher die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit einander gemein, und da dieselben im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, so folgt, dass beide Kugeln identisch sind. Wenn dagegen der Punkt P der Curve k_1^6 angehört, so haben die beiden Kugeln zwar auch die Punkte

P_1, P_2, P_3, P_4 mit einander gemein; da dieselben jedoch, als Punkte von k_1^6, stets in derselben Ebene liegen, so werden die beiden Kugeln im Allgemeinen nicht zusammenfallen. Daraus folgt:

Es giebt unendlich viele Punkte des starren Systems, welche während sechs auf einander folgender Lagen auf derselben Kugel bleiben. Dieselben bilden im Allgemeinen eine Raumcurve zehnter Ordnung k^{10}, welche zusammen mit k_1^6 den vollständigen Durchschnitt der Flächen F^4 und F_1^4 darstellt.

Nehmen wir wiederum die Fläche F_2^4 hinzu, so erhalten wir im Allgemeinen 64 Schnittpunkte. Jeder dieser 64 Schnittpunkte hat die Eigenschaft, dass für ihn je fünf auf einander folgende Lagen derselben Kugel angehören. Von jedem derselben, welcher nicht gleichzeitig auf k_1^6 oder k_2^6 liegt, lässt sich wiederum zeigen, dass die drei zugehörigen Kugeln, gebildet von $P, \ldots P_4$; $P_1, \ldots P_5$ und $P_2, \ldots P_6$ zusammenfallen müssen. Ist nämlich P ein Punkt von k_1^6, so können die beiden ersten Kugeln wohl von einander verschieden sein, da ihre gemeinsamen Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf demselben Kreise liegen, und dasselbe folgt für die Punkte von k_2^6 bezüglich der zweiten und dritten Kugel. In allen andern Fällen dagegen sind die drei Kugeln identisch. Nun enthalten F^4 und F_1^4 die Curve k_1^6, und diese Curve wird von F_2^4 in 24 Punkten geschnitten, welche allen drei Flächen gemeinsam sind; ebenso enthalten F_1^4 und F_2^4 die Curve k_2^6; und sie wird von F^4 in 24 Punkten geschnitten, die allen drei Flächen gemeinsam sind; es bleiben also nur noch 16 gemeinsame Punkte der drei Flächen, die weder auf k_1^6 noch auf k_2^6 liegen; also folgt:

Es giebt im Allgemeinen 16 Punkte des starren Systems, welche die Eigenschaft haben, während sieben auf einander folgender Lagen auf derselben Kugel zu bleiben.

Diese 16 Punkte sind gleichzeitig die Schnittpunkte der Curven k^{10} und k_1^{10}; d. h. zwei auf einander folgende Curven k^{10} schneiden sich im Allgemeinen in 16 Punkten. Zu ihnen gehört z. B. jeder Punkt, der gezwungen ist, sich auf einer festen Kugel zu bewegen. Analog zu § 8 ergiebt sich wieder, dass auf jeder Fläche F^4 je zwei Curven k^6 und je zwei Curven k^{10} liegen; die beiden Curven k^6 haben im Allgemeinen keinen gemeinsamen Punkt, die beiden Curven k^{10} dagegen schneiden sich im Allgemeinen in 16 Punkten.

11. Von der Schnittcurve der Flächen F^3 und F^4 lässt sich beweisen, dass sie in die beiden Curven k^6 und c^6 zerfällt. Von der Curve

k^6 ist schon gezeigt worden, dass sie beiden Flächen angehört; dasselbe muss aber auch für c^6 der Fall sein. In der That, c^6 ist eine Curve der Fläche F^3 und enthält diejenigen Punkte, welche während fünf auf einander folgender Lagen in derselben Ebene bleiben; daher liegt sie auch auf F^4 und besteht aus denjenigen Punkten dieser Fläche, für welche die zugehörige Kugel in eine Ebene degenerirt. Es ergiebt sich übrigens auch direct, dass für alle Punkte von c^6 je vier Normalebenen π^r, π_1^r, π_2^r, π_3^r sich in einem, und zwar unendlich fernen Punkte schneiden; denn alle diese Normalebenen sind senkrecht zur Ebene $\overline{PP_1P_2P_3P_4}$.

Die Flächen F^3, F^4 und die Curven i^3, c^6, k^6, k^{10} haben demnach eine solche Lage zu einander, dass auf F^3 alle Curven ausser k^{10}, und auf F^4 alle ausser i^3 liegen. Jeder Schnittpunkt von i^3 und F^4 ist dadurch ausgezeichnet, dass für ihn sowohl P, P_1, P_2 eine Gerade bilden, als auch P, P_1, P_2, P_3, P_4 auf einer Kugel liegen. Dies kann nur dann gleichzeitig stattfinden, wenn die Kugel in eine Ebene degenerirt; alsdann gehört aber der Punkt P auch der Curve c^6 an; d. h. jeder Schnittpunkt von i^3 und F^4 fällt in einen Punkt von c^6, also *schneiden sich die Curven i^3 und c^6 im Allgemeinen in 12 Punkten.* Ferner ist ein Schnittpunkt von k^{10} und F^3 dadurch charakterisirt, dass für ihn die Lagen P, P_1, P_2, P_3 in derselben Ebene und gleichzeitig die Lagen P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 auf derselben Kugel bleiben. Dies kann wiederum nur dann stattfinden, wenn die Lagen P, P_1, P_2, P_3 Punkte eines Kreises sind, d. h. jeder Schnittpunkt von k^{10} und F^3 fällt in einen Punkt von k^6, *also schneiden sich die Curven k^6 und k^{10} im Allgemeinen in 30 Punkten.*

12. Rücken die Axen der Schraubenbewegungen einander unendlich nahe, und werden die Verschiebungen unendlich klein, so wird das starre System eine ganz allgemeine continuirliche Bewegung ausführen. *Alsdann gehen die vorstehenden Sätze,* wie schon im Anfang dieser Arbeit erwähnt worden, *in Theoreme über die Krümmung der Bahncurven über, welche von den Punkten des starren Systems beschrieben werden.* Nun sind die Bestimmungsstücke einer beliebigen Raumcurve: die Tangente, die Schmiegungsebene, die Normalebene mit der Hauptnormalen, die Krümmungsaxe, die Schmiegungskugel und die rectificirende Ebene. Wenn man nun beachtet, dass es im Allgemeinen keinen Punkt des starren Systems geben kann, dessen Bahn eine stationäre Normalebene, resp. Hauptnormale besitzt, weil im Allgemeinen kein Punkt des Systems existirt, der sich in einem

bestimmten Augenblick in Ruhe befindet, so folgt, dass durch die vorstehenden Resultate die Aufgabe gelöst ist, die geometrischen Oerter derjenigen Punkte des starren Systems zu bestimmen, für deren Bahnen irgend eines dieser Bestimmungsstücke stationär wird. Die betreffenden Sätze lassen sich ohne Weiteres aussprechen, so dass es überflüssig erscheint, dieselben nochmals besonders aufzustellen. Nur darauf möchte ich noch hinweisen, dass die Gesammtheit der Curven i^3, c^6, k^6, k^{10} je eine Fläche bildet, von der Eigenschaft, dass diese Flächen alle Punkte des starren Systems enthalten, deren Bahnen im Verlauf der Bewegung irgend einmal eine stationäre Tangente, resp. Krümmungsaxe u. s. w. besitzen. Die Natur dieser Flächen wird von der Bewegungsart des Systems abhängen.

Göttingen, im November 1884.

Note über die Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Durch die Untersuchungen von ***Hamilton, Ch. Sturm*** und ins Besondere durch die von Herrn ***Kummer*** sind die geometrischen Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel in einer Vollkommenheit dargelegt worden, welche die Hinzufügung von Wesentlichem ausschliesst.

Wenn in Folgendem dennoch eine Bemerkung über die Brennlinien unendlich dünner Strahlenbündel mitgetheilt wird, so dürfte diese Bemerkung ihre Rechtfertigung darin finden, dass in neuerer Zeit aus der Existenz von Brennlinien unendlich dünner optischer Strahlenbündel, welche den Hauptstrahl in schiefer Richtung durchschneiden, Einwürfe gegen die erwähnten Theorien abgeleitet worden sind *).

Will man unter einer Brennlinie eines unendlich dünnen Strahlenbündels eine Gerade verstehen, welche von jedem Strahl des Bündels in geometrischem Sinne geschnitten wird, so ist der Besitz von Brennlinien überhaupt keine allgemeine Eigenschaft dieser Strahlenbündel, weder der optischen noch der weiteren geometrischen Bündel. Legt man dagegen einer solchen Linie die Bedeutung einer Geraden bei, welche den mittleren Strahl des Bündels durchschneidet, und an welcher jeder Strahl desselben in einem kürzesten Abstand vorbeigeht, welcher verschwindend klein ist gegen die unendlich kleinen Dimensionen des Bündels, so besitzt jedes unendlich dünne Strahlenbündel mit reellen Brennpunkten *unbegrenzt* viele Brennlinien.

Bezeichnet man als erste Focalebene eines Strahles diejenige Ebene, in welcher dieser Strahl selbst, und der ihn im ersten Brennpunkte schnei-

*) ***Matthiessen,*** Acta mathematica Bd. 4, pag. 179; dgl. Sitzungsberichte der math. u. phys. Klasse der Kgl. Bayr. Akademie d. Wissenschaften. 1883. H. 1.

dende enthalten ist, und als zweite Focalebene die entsprechende auf den anderen Brennpunkt bezügliche, so ist *jede* den betrachteten Strahl im ersten Brennpunkt schneidende und in der zweiten Focalebene liegende, so wie *jede* ihn im anderen Brennpunkte schneidende in der ersten Focalebene liegende Gerade eine *Brennlinie* des diesen Strahl umgebenden unendlich dünnen Strahlenbündels.

Es soll dieser für alle geometrischen Strahlenbündel mit reellen Brennpunkten gültige, leicht nachweisbare Satz hier nur für diejenigen unendlich dünnen Strahlenbündel nachgewiesen werden, welche durch die Normalen eines kleinen Elementes einer krummen Oberfläche gebildet werden.

Ist O ein Punkt einer krummen Oberfläche, und wählt man in üblicher Weise die Normale in diesem Punkte zur Axe der z eines rechtwinkligen Coordinatensystems, zu Axen der x und y die Tangenten an die Krümmungslinien in diesem Punkt, so wird die Coordinate z eines dem Punkte O benachbarten Punktes (x, y, z) der Fläche durch die bekannte Beziehung

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2)$$

gegeben, wenn man sich der *Monge*schen Bezeichnungsweise p, q, r, s, t für die Derivirten von z bedient, und durch Hinzufügen des Index 0 die Werthe dieser Derivirten im Punkte O bezeichnet. Es gelten die weiteren Gleichungen:

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0, \quad s_0 = 0,$$

und für die Werthe der Grössen p, q in dem betrachteten Nachbarpunkte von O:

$$p = r_0 x, \quad q = t_0 y.$$

Legt man durch einen noch näher zu bestimmenden Punkt $(0, 0, h)$ der Normale in O eine Gerade, deren Winkel mit den Axen die Cosinus a, b, c besitzen, so ist der algebraische Werth des kürzesten Abstandes δ dieser Geraden, von der durch einen Punkt (x, y, z) der Fläche gezogenen Normalen durch die bekannte Formel

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} -x & a & p \\ -y & b & q \\ h-z & c & -1 \end{vmatrix}$$

gegeben, in welcher θ den Winkel bezeichnet, den die Linien, deren kleinster Abstand zu bestimmen ist, mit einander bilden. Soll dieser kürzeste Abstand eine Grösse zweiter Ordnung in Beziehung auf die Coordinaten x, y

sein, so müssen die in der Entwickelung von δ nach Potenzen von x, y auftretenden Glieder erster Ordnung:

$$\frac{1}{\sin\theta_0}\{-a(1-ht_0)y+b(1-hr_0)x\}$$

identisch verschwinden. Dieses Verschwinden erfordert das Bestehen der Gleichungen

$$(1.)\quad a(1-ht_0)=0, \qquad (2.)\quad b(1-hr\ )=0.$$

Das gleichzeitige Nullwerden der Cosinus a, b ist durch die Voraussetzung, dass die Normale in O im Punkte $(0, 0, h)$ durch die zu bestimmende Gerade thatsächlich geschnitten werde, ausgeschlossen.

Die Gleichungen (1.) und (2.) bestehen hiernach nur, wenn entweder

$$h=\frac{1}{r_0},\quad a=0$$

oder

$$h=\frac{1}{t_0},\quad b=0$$

gewählt wird, während $c=\cos\theta_0$ willkürlich bleibt. Es verschwindet daher, bis auf Grössen zweiter Ordnung, der kürzeste Abstand jeder durch den ersten Krümmungsmittelpunkt in der zweiten Hauptebene, und jeder durch den zweiten Krümmungsmittelpunkt in der ersten Hauptebene gelegten, die z-Axe schneidenden Geraden von jeder durch irgend einen Nachbarpunkt des Punktes O der gegebenen Fläche gezogenen Normalen.

Alle diese Geraden sind daher *Brennlinien* eines um die Normale in O gedachten unendlich dünnen Normalenbündels.

Wenn der Nachweis der Existenz von Brennlinien, welche die Axe eines unendlich dünnen Normalenbündels nicht unter rechtem Winkel durchschneiden, sich in den erwähnten classischen Theorien nicht findet, so erscheint dies dadurch ohne Weiteres gerechtfertigt, dass für die Zielpunkte jener Untersuchungen grade die Auswahl gewisser, durch ihre Lage bevorzugter, Brennlinien angezeigt war.

Berlin, 1885.

Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Die von Herrn *F. Klein* *) vorgezeichnete Eintheilung der quadratischen Strahlencomplexe in Gattungen wurde bekanntlich auf Grund der Elementartheiler des Herrn *Weierstrass* von Herrn *Weiler* **) vollständig durchgeführt und neuerdings auf erweiterter geometrischer Grundlage von Herrn *Segre* ***) wieder aufgenommen. Beide Autoren finden übereinstimmend 49 Gattungen irreducibler quadratischer Complexe. Die erste dieser Gattungen umfasst die allgemeinen Complexe zweiten Grades, welche von 19 Constanten abhängen; auf die übrigen 48 Gattungen vertheilen sich die besonderen Complexe, in denen Doppelstrahlen vorkommen. Eine weitere Eintheilung der Gattungen in Arten, etwa mit Rücksicht auf die Zahl der imaginären Elementartheiler, ist bisher von keiner Seite versucht worden.

In geometrischer Hinsicht aber dürften die verschiedenen Arten quadratischer Complexe noch erheblich mehr Interesse darbieten, als ihre verschiedenen Gattungen. Zu den letzteren kann man von den allgemeinen Complexen ausgehend durch Specialisirung gelangen, ähnlich wie von der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung zu der Kegelfläche und von dieser zu dem Ebenenpaare. Dagegen sind die Uebergänge von einem quadratischen Complexe zu anders *gearteten* vorläufig der Anschauung weit weniger zugänglich.

---

*) *F. Klein*, über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form. Inaug.-Diss., Bonn 1868, S. 35. Wieder abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 23, 1884.

**) *Weiler*, über die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades (Math. Ann. Bd. 7, 1874).

***) *Segre*, sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie II, T. XXXVI, 1884).

Wir werden hyperbolische, parabolische, elliptische und imaginäre Complexe zweiten Grades, unter den parabolischen und den elliptischen aber wieder mehrere Hauptarten unterscheiden lernen. Während die parabolischen mit jedem linearen Complexe und die hyperbolischen sogar mit jeder linearen Congruenz unendlich viele reelle Strahlen gemein haben, werden die elliptischen nicht von jedem und die imaginären überhaupt von keinem linearen Complexe in reellen Strahlen geschnitten. Reelle Strahlenbüschel erster Ordnung können deshalb nur in hyperbolischen und parabolischen Complexen vorkommen. Bei einigen Arten quadratischer Complexe sind die Complexkegel aller Punkte des Raumes reell, bei anderen sind sie zum Theil oder sämmtlich imaginär. Auch die Singularitätenflächen gewisser Arten sind, wie wir sehen werden, der Form nach wesentlich von einander verschieden; doch giebt es andererseits auch verschiedenartige Complexe, welche dieselbe Singularitätenfläche haben.

Wir beschränken uns übrigens bei der Eintheilung in Hauptarten auf die allgemeinen Complexe zweiten Grades, deren Eigenschaften ja auf die analogen Arten besonderer Complexe übertragen werden können. Auch werden wir der Kürze halber manche leichteren Beweise nur andeuten oder auch ganz unterdrücken.

I. Die Hauptarten der quadratischen Complexen-Gewebe.

1. Wie in früheren Arbeiten *) bezeichnen wir mit $x_1, x_2, \dots x_6$ die homogenen Coordinaten eines linearen Complexes und mit $[x] = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6$ seine Invariante. Die Gleichung $[x] = 0$ repräsentirt dann das „Hauptgewebe H“, d. h. die Gesammtheit aller speciellen Complexe. Durch jede andere, für die x_i homogene, quadratische Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ wird ein quadratisches Complexengewebe vierter Stufe Γ dargestellt; dasselbe hat mit H ein biquadratisches Gewebe von speciellen Complexen gemein, deren Axen den „in Γ enthaltenen“ quadratischen Complex Γ_0 bilden.

Das quadratische Gewebe Γ enthält entweder keine oder unendlich viele reelle Büschel, Bündel resp. Gebüsche linearer Complexe. Denn jedes lineare Gewebe zweiter, dritter oder vierter Stufe, welches durch ein reelles lineares Gewebe erster, zweiter resp. dritter Stufe des quadratischen Gewebes Γ gelegt wird, hat mit Γ noch ein solches Gewebe (also noch einen

*) Dieses Journal Bd. 95, S. 330—348 und Bd. 97, S. 242—260.

Büschel, Bündel resp. ein Gebüsch) gemein. Nur bei mehrfach singulären Geweben können Ausnahmen eintreten.

2. Die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ von Γ, deren Coefficienten a_{ik} wir als reelle Constanten voraussetzen, kann bekanntlich auf unendlich viele Arten auf die Form:

$$k_1 P_1^2 + k_2 P_2^2 + \cdots + k_6 P_6^2 = 0$$

gebracht werden, wenn wir mit P_j eine reelle lineare Function der Complexcoordinaten x_i und mit k_j eine reelle Constante bezeichnen. Von den sechs linearen Complexengeweben, welche für $j = 1, 2, \ldots 6$ durch die Gleichungen $P_j = 0$ dargestellt werden, ist jedes von dem linearen Complexe, in welchem die fünf übrigen sich durchdringen, die Polare in Bezug auf das quadratische Gewebe Γ. Das erste dieser sechs linearen Gewebe kann willkürlich angenommen, und das i^{te} beliebig durch die Complexe gelegt werden, von welchen die $i-1$ vorher angenommenen die Polaren sind.

Wir nehmen an, dass diese sechs linearen Gewebe keinen Complex mit einander gemein haben. Ist dann einer der Coefficienten, etwa k_6, Null, so ist Γ ein singuläres Gewebe, und zwar liegt sein Doppelcomplex in den fünf linearen Geweben $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $\ldots$ $P_5 = 0$; sind zwei, drei oder vier der Constanten k_j Null, so enthält Γ alle Complexe eines Büschels, Bündels resp. Gebüsches doppelt, und besteht im letzten dieser Fälle aus zwei linearen Geweben. Abgesehen von diesen Specialfällen können die Constanten k_j unbeschadet der Allgemeinheit von Γ gleich ± 1 gesetzt werden.

3. Wir unterscheiden nunmehr vier Hauptarten des allgemeinen quadratischen Complexengewebes vierter Stufe, nämlich:

a) das hyperbolische, welches durch die Gleichung

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_4^2 - P_5^2 - P_6^2 = 0$$

dargestellt wird und unendlich viele reelle Complexenbündel enthält; acht dieser Bündel werden durch die Gleichungen

$$P_1 \pm P_4 = 0, \quad P_2 \pm P_5 = 0, \quad P_3 \pm P_6 = 0$$

repräsentirt;

b) das parabolische $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 - P_5^2 - P_6^2 = 0$, welches unendlich viele reelle Complexenbüschel

$$(\text{z. B.} \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 \pm P_5 = 0, \quad P_4 \pm P_6 = 0),$$

aber keinen reellen Bündel enthält;

c) das elliptische $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + P_5^2 - P_6^2 = 0$, welches keine reellen

Complexenbüschel enthält und mit jedem seiner linearen Berührungsgewebe nur einen reellen Complex gemein hat;

d) das imaginäre Complexengewebe

$$P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2+P_5^2+P_6^2 = 0,$$

in welchem gar keine reellen Complexe enthalten sind.

4. Die parabolischen Gewebe trennen die elliptischen von den hyperbolischen, und die elliptischen trennen die parabolischen von den imaginären Geweben. Die Grenzen benachbarter Hauptarten des allgemeinen quadratischen Gewebes bilden die Hauptarten des singulären Gewebes. Wenn ein quadratisches Gewebe ein Complexengebüsch enthält, so hat es einen Büschel von Doppelcomplexen und ist zweifach-singulär. Zwei nicht singuläre quadratische Gewebe, welche bezüglich eines dritten, z. B. bezüglich des Hauptgewebes H, reciproke Polaren sind, gehören zu derselben Art.

Zwei quadratische Complexengewebe gleicher Art, wie:

$$k_1P_1^2+k_2P_2^2+\cdots+k_6P_6^2=0 \quad \text{und} \quad k_1Q_1^2+k_2Q_2^2+\cdots+k_6Q_6^2=0,$$

sind reell-projectiv auf einander bezogen, so dass jedem reellen Complexen-Büschel oder -Bündel des einen ein solcher des andern entspricht, wenn $P_1:Q_1=P_2:Q_2=\cdots=P_6:Q_6=$ Const. gesetzt wird. Ueberhaupt wird dadurch jedem Büschel, welcher zwei Complexe des einen Gewebes verbindet, derjenige Büschel zugewiesen, welcher durch die entsprechenden beiden Complexe des andern Gewebes geht.

5. Ein ***hyperbolisches*** Complexengewebe

$$P_1^2+P_2^2+P_3^2-P_4^2-P_5^2-P_6^2 = 0$$

wird auf das Hauptgewebe H reell-projectiv bezogen (4.), wenn gesetzt wird:

$$x_1=P_1+P_4,\ x_2=P_2+P_5,\ x_3=P_3+P_6,\ x_4=P_1-P_4,\ x_5=P_2-P_5,\ x_6=P_3-P_6.$$

Nun enthält aber H zwei Systeme von dreifach unendlich vielen Complexenbündeln; denn die speciellen Complexe, deren Axen durch einen Punkt gehen oder aber in einer Ebene liegen, bilden einen Bündel von H. Daraus ergeben sich sofort die folgenden für das Hauptgewebe evidenten Sätze:

Jedes hyperbolische Complexengewebe Γ enthält zwei Systeme von dreifach unendlich vielen reellen Complexenbündeln. Zwei dieser Bündel haben allemal einen einzigen Complex gemein, wenn sie zu demselben, dagegen i. A. keinen Complex, wenn sie nicht zu demselben Systeme

gehören *). Mit einem beliebigen Bündel des einen Systemes haben jedoch zweifach unendlich viele des andern je einen Büschel gemein, diejenigen nämlich, welche mit ihm durch Gebüsche verbunden werden können.

Durch jeden Complex des hyperbolischen Gewebes gehen von beiden Systemen unendlich viele Bündel; dieselben liegen in dem linearen Gewebe, welches das hyperbolische in jenem Complexe berührt. —

Die Axen der speciellen Complexe eines Bündels bilden i. A. eine reelle oder imaginäre Regelschaar zweiter Ordnung. Ein hyperbolisches Complexengewebe enthält demnach zwei Systeme von dreifach unendlich vielen solchen Regelschaaren **). Zwei dieser Schaaren können allemal oder nur ausnahmsweise durch einen linearen Complex verbunden werden, je nachdem sie demselben Systeme angehören oder nicht. Die Ausnahme tritt im letzteren Falle dann ein, wenn die beiden Schaaren in einer linearen Congruenz enthalten sind und demgemäss zwei reelle oder imaginäre Strahlen gemein haben.

Die Polare Γ' eines hyperbolischen Complexengewebes Γ bezüglich des Hauptgewebes H enthält die Polaren aller Complexenbündel von Γ, also diejenigen Bündel, auf welche jene sich stützen. Die Axen der speciellen Complexe von zwei sich stützenden Complexenbündeln bilden aber bekanntlich i. A. die beiden Regelschaaren einer Fläche zweiter Ordnung. Die ∞^3 in Γ' enthaltenen Regelschaaren sind demnach die Leitschaaren der in Γ enthaltenen. Wir erinnern beiläufig daran, dass die beiden in Γ' und Γ enthaltenen und durch diese resp. Schaaren gehenden quadratischen Complexe Γ_0' und Γ_0 ihre singulären Punkte und Ebenen mit einander gemein haben ***).

6. Das *hyperbolische* Complexengewebe Γ hat mit jedem linearen Gewebe vierter oder dritter Stufe dreifach unendlich viele reelle Büschel resp. ∞^2 reelle Complexe gemein; jeder Complexenbündel von Γ enthält einen derselben. Dagegen giebt es unendlich viele Bündel, z. B. $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ und dessen Polare $P_4 = 0$, $P_5 = 0$, $P_6 = 0$, welche mit Γ

---

*) Vgl. *Segre* a. a. O. No. 126 und 105.

**) Diese und analoge Systeme von ∞^3 Regelschaaren eines quadratischen Complexes Γ_0 wurden von Herrn *Friedr. Schur* entdeckt (Geometr. Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades. Inaug.-Diss., Berlin 1879, S. 35 u. 40). Herr *Segre* zeigte (a. a. O. S. 20) ihren Zusammenhang mit den durch Γ_0 gehenden quadratischen Geweben Γ.

***) Dieses Journal Bd. 95 S. 343.

keinen reellen Complex gemein haben. Zwei dieser Bündel liegen entweder auf einer und derselben Seite von Γ, oder sie sind durch Γ getrennt; im letzteren Falle hat jeder Complexenbüschel, welcher zwei ihrer Complexe verbindet, mit Γ zwei durch sie getrennte, reelle Complexe gemein. — Wenn z. B. zwei Bündel specieller Complexe, deren Axen einen Strahlenbündel S und ein ebenes Strahlenfeld σ bilden, durch Γ getrennt sind, so giebt es weder in S noch in σ reelle Strahlen des in Γ enthaltenen quadratischen Complexes Γ_0; dagegen ist jeder Punkt von σ der Mittelpunkt eines reellen Complexkegels von Γ_0, welcher den Punkt S ein- und die Ebene σ ausschliesst, und ebenso enthält jede Ebene von S eine reelle Complexcurve von Γ_0, von welcher S ein- und σ ausgeschlossen wird.

7. Ein *parabolisches* Complexengewebe

$$P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2-P_5^2-P_6^2 = 0$$

enthält fünffach unendlich viele reelle Complexenbüschel; denn in jedem seiner ∞^4 Berührungsgewebe liegen ∞^2 derselben, welche alle durch den zugehörigen Berührungscomplex gehen. Mit einem beliebigen dieser ∞^5 Büschel haben nur ∞^3 der übrigen je einen Complex gemein. Jedes lineare Complexengewebe vierter Stufe hat mit dem parabolischen Γ dreifach unendlich viele reelle Complexe gemein, nämlich je einen mit den reellen Complexenbüscheln von Γ. Dagegen giebt es unendlich viele Complexengebüsche, welche mit Γ keine reellen Complexe gemein haben, z. B. $P_5 = 0$, $P_6 = 0$ oder $P_5 = 0$, $\lambda P_3 + \mu P_6 = 0$ für $\lambda^2 < \mu^2$ *). Wir nennen deren Polaren „von Γ eingeschlossen", weil durch sie keine reellen linearen Berührungsgewebe von Γ gehen. Die linearen Congruenzen, welche in diesen Gebüschen enthalten sind, haben mit dem in Γ enthaltenen quadratischen Complexe Γ_0 keine reellen Strahlen gemein. Die Grenze zwischen diesen Gebüschen und den übrigen bilden die Berührungsgebüsche von Γ.

8. Das *elliptische* Complexengewebe

$$P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2+P_5^2-P_6^2 = 0$$

hat mit unendlich vielen linearen, z. B. mit $P_6 = 0$, keine reellen Complexe gemein; der in ihm enthaltene quadratische Complex Γ_0 geht folglich durch keinen reellen Strahl der linearen Complexe, auf welche diese linearen Gewebe sich stützen. Die ∞^4 linearen Berührungsgewebe des elliptischen

*) Es ist $P_3^2-P_6^2 = (\mu P_3+\lambda P_6)^2-(\lambda P_3+\mu P_6)^2$, wenn $\mu^2-\lambda^2 = 1$.

Γ bilden die Grenze jener linearen Gewebe. Die Polarcomplexe der letzteren sind von dem elliptischen Gewebe Γ „eingeschlossen", indem durch sie keine reellen linearen Berührungsgewebe an Γ gelegt werden können. Jeder durch einen von ihnen gelegte Complexenbüschel hat mit Γ zwei reelle Complexe gemein, welche jenen Complex von einem ihm conjugirten harmonisch trennen. Wenn insbesondere ein specieller Complex von dem elliptischen Gewebe Γ eingeschlossen ist, so enthält demnach jeder durch seine Axe gehende Strahlenbüschel erster Ordnung zwei reelle Strahlen des quadratischen Complexes Γ_0; die Axe wird folglich von den Complexkegeln aller ihrer Punkte eingeschlossen und liegt ausserhalb der Complexcurven aller ihrer Ebenen.

Ein Complexenbüschel kann ganz ausserhalb des elliptischen Gewebes Γ liegen; falls er aber von Γ eingeschlossene Complexe enthält, so werden dieselben von seinen übrigen Complexen durch zwei reelle Complexe des Gewebes Γ getrennt. Sind alle Complexe des Büschels speciell, und bilden demgemäss ihre Axen einen Strahlenbüschel S, so umschliesst der mit S concentrische Kegel des quadratischen Complexes Γ_0 die Axen der von Γ eingeschlossenen Complexe des Büschels (s. oben).

II. Die Hauptarten der allgemeinen Strahlencomplexe zweiten Grades.

9. Die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda [x] = 0$ mit dem willkürlichen Parameter λ repräsentirt einen Büschel quadratischer Complexengewebe Γ, welche alle denselben quadratischen Complex Γ_0 enthalten. Die Gleichungen

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 \quad \text{und} \quad [x] = 0$$

von Γ_0 repräsentiren zugleich das biquadratische Gewebe dritter Stufe, welches die Gewebe Γ mit einander und mit dem Hauptgewebe H gemein haben (vgl. 1.).

Der durch Γ_0 gehende Γ-Büschel enthält allemal unendlich viele hyperbolische Complexengewebe, kann aber ausserdem parabolische, elliptische und imaginäre Gewebe enthalten. Diese verschiedenen Arten von Geweben sind in dem Büschel durch singuläre quadratische Gewebe getrennt; zu den hyperbolischen gehört das Hauptgewebe H und jedes andere Gewebe des Büschels, welches von H durch keine singulären Gewebe desselben getrennt ist. Die Doppelcomplexe der hier in Betracht kommenden

singulären Gewebe sind reell und gehören zu den Fundamentalcomplexen von Γ_0, in Bezug auf welche Γ_0 sich selbst zugeordnet ist *).

Der quadratische Complex Γ_0 kann reelle Doppelstrahlen haben; einfache reelle Strahlen enthält er entweder gar keine oder dreifach unendlich viele, weil jeder Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher durch einen solchen Strahl von Γ_0 gelegt wird, noch einen zweiten, i. A. von jenem verschiedenen, reellen Strahl mit Γ_0 gemein hat. Diese ∞^3 reellen Strahlen bilden im letzteren Falle vierfach unendlich viele, in Γ_0 enthaltene, reelle Regelschaaren und zwar enthält jedes durch Γ_0 gehende hyperbolische Gewebe zwei Systeme von ∞^3 dieser Schaaren (5.). Durch jeden einfachen reellen Strahl von Γ_0 gehen unendlich viele Regelschaaren eines beliebigen dieser Systeme.

10. Wenn ein Complexengebüsch mit jedem Gewebe des Γ-Büschels zweifach unendlich viele reelle Complexe gemein hat, so geht sein Träger, d. h. die in ihm enthaltene lineare Congruenz, durch unendlich viele reelle Strahlen des quadratischen Complexes Γ_0. Zum Beweise eliminiren wir mittelst der beiden linearen Gleichungen des Gebüsches zwei der sechs Complexcoordinaten x_i aus der Gleichung

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda [x] = 0,$$

und setzen die vier übrigen den homogenen Coordinaten eines Punktes X proportional. Jedem reellen Punkte des Raumes entspricht dann ein reeller Complex des Gebüsches, und umgekehrt; den ∞^2 reellen Complexen aber, welche das Gebüsch mit einem Gewebe des Γ-Büschels gemein hat, entsprechen die ∞^2 reellen Punkte einer Fläche zweiter Ordnung F^2. Dem Γ-Büschel entspricht auf diese Weise ein zu ihm projectiver F^2-Büschel, dessen Flächen alle reell sind und sich folglich in einer reellen Curve durchdringen; denn bekanntlich enthält jeder F^2-Büschel, dessen Basiscurve imaginär ist, auch imaginäre Flächen zweiter Ordnung mit reellen Coefficienten. Den reellen Punkten jener Curve aber entsprechen unendlich viele Complexe, welche dem Gebüsche und allen Geweben des Γ-Büschels zugleich angehören; dieselben sind speciell, weil sie auch in H enthalten sind, und ihre Axen sind gemeinschaftliche Strahlen des quadratischen Complexes Γ_0 und der im Gebüsche enthaltenen linearen Congruenz.

11. Ein quadratischer Complex Γ_0 möge „hyperbolisch" genannt

*) Vgl. dieses Journal Bd. 95 S. 339.

werden, wenn alle ihn enthaltenden quadratischen Gewebe Γ hyperbolisch sind, dagegen „parabolisch“, wenn sie theils hyperbolisch theils parabolisch sind; wir nennen ihn „imaginär“, wenn er auch in imaginären, und „elliptisch“, wenn er in elliptischen, nicht aber in imaginären Geweben enthalten ist. Nur die hyperbolischen und die parabolischen Complexe können reelle Strahlenbüschel erster Ordnung enthalten; denn in elliptischen Geweben kommen reelle Büschel von speciellen Complexen nicht vor (3.), und imaginäre Complexe enthalten überhaupt keine reellen Strahlen. In einem elliptischen Complexe zerfallen deshalb die Complexkegel und -Curven singulärer Punkte resp. Ebenen allemal in je zwei imaginäre Ebenen resp. Punkte, und seine Singularitätenfläche hat keine reellen Doppelpunkte und Doppelebenen. Die Singularitätenfläche eines imaginären Complexes hat überhaupt keine reellen Punkte und Berührungsebenen, weil der Complex keine reellen singulären Strahlen enthalten kann.

Ein hyperbolischer Complex hat mit jeder linearen Congruenz unendlich viele reelle Strahlen gemein (10., 6.); von einem parabolischen sind in jedem linearen Complexe *), nicht aber in jeder linearen Congruenz reelle Strahlen enthalten (7.); ein elliptischer Complex hat mit unendlich vielen linearen keine reellen Strahlen gemein (8.). Wenn ein quadratischer Complex einen oder mehrere Strahlenbündel enthält, wie beispielsweise der tetraëdrale, so ist er allemal hyperbolisch.

12. Im *elliptischen* Complexe wird jede Gerade, die von irgend einem Complexkegel eingeschlossen ist, von den Complexkegeln aller ihrer (reellen) Punkte umschlossen, und liegt ausserhalb der Complexcurven aller ihrer Ebenen. Denn jedes durch ihn gehende elliptische Gewebe umschliesst den speciellen Complex, dessen Axe die Gerade ist (8.). Die Singularitätenfläche des elliptischen Complexes kann deshalb nur mit solchen Geraden reelle Punkte oder reelle Berührungsebenen gemein haben, welche ausserhalb der Complexkegel ihrer Punkte liegen. Ist sie reell, so trennt sie die Mittelpunkte der reellen Complexkegel und die Ebenen der reellen Complexcurven von den übrigen Punkten resp. Ebenen des Raumes; ist sie imaginär, so sind die Complexkegel aller (reellen) Punkte und die Complexcurven aller Ebenen reell, sofern der Complex überhaupt reelle Strahlen enthält.

---

*) Wegen des Beweises vergleiche man den analogen Beweis in No. 10.

Die elliptischen Gewebe Γ und Γ' seien reciproke Polaren bezüglich des Hauptgewebes H, und die in ihnen enthaltenen quadratischen Complexe seien mit Γ_0 und Γ_0' bezeichnet. Dann hat Γ_0 keine reellen Strahlen gemein mit den von Γ' eingeschlossenen linearen Complexen; denn letztere sind die Träger der linearen Gewebe, welche mit Γ keine reellen Complexe gemein haben (8.). Insbesondere also schneiden die Geraden, welche von einem beliebigen Kegel des Complexes Γ_0' eingeschlossen sind, keinen reellen Strahl von Γ_0. Folglich haben keine zwei reelle Kegel der Complexe Γ_0 und Γ_0' denselben Mittelpunkt; vielmehr ist das Centrum jedes reellen Kegels des einen Complexes zugleich dasjenige eines imaginären Kegels des andern. Sind beide Complexe reell, so trennt ihre gemeinschaftliche Singularitätenfläche die reellen Kegel des einen von denen des andern, und zugleich trennt sie die von diesen resp. Kegeln eingeschlossenen Geraden von einander; sie wird deshalb von jeder Ebene in einer reellen Curve geschnitten und sendet ebenso nach jedem Punkte des Raumes einen reellen Tangentenkegel. Hat nur einer der beiden Complexe reelle Strahlen, so sind alle seine Kegel und ebenen Curven reell, und die Singularitätenfläche ist imaginär.

13. Jeder *parabolische* oder *hyperbolische* Complex enthält zweifach unendlich viele reelle Strahlen, welche eine beliebig angenommene Gerade schneiden (11.), und folglich auch unendlich viele reelle Kegel und ebene Curven. Die Mittelpunkte resp. Ebenen der letzteren erfüllen entweder den ganzen Raum, oder sie sind durch einen oder mehr als einen Mantel der Singularitätenfläche von den übrigen Punkten resp. Ebenen getrennt. Jede durch den Mittelpunkt eines imaginären Complexkegels gelegte Gerade hat mit der Singularitätenfläche mindestens zwei reelle Punkte gemein, deren Complexkegel in je zwei imaginäre Ebenen zerfallen; nur wenn einer oder jeder dieser Punkte ein Doppelpunkt der Singularitätenfläche ist, reducirt sich sein Complexkegel auf eine zweifache Ebene.

14. In jedem *hyperbolischen* Complexe Γ_0 giebt es unendlich viele reelle Strahlen, welche zwei beliebige Gerade g und g_1 schneiden (11.). Gehen g und g_1 durch den Mittelpunkt S eines imaginären Kegels von Γ_0, so enthält folglich die Ebene gg_1 eine reelle, den Punkt S einschliessende Complexcurve; wenn anderseits die Complexcurve einer beliebigen Ebene gg_1 imaginär ist, so sind die Complexkegel aller Punkte S der Ebene reell. Keine Gerade g kann von den Kegeln aller ihrer Punkte eingeschlossen

sein oder ausserhalb der Complexcurven aller ihrer Ebenen liegen, weil sonst kein reeller Strahl dieser Kegel resp. Curven zugleich die Polare g_1 von g in Bezug auf Γ_0 schneiden würde; denn bekanntlich gehen durch g_1 die Polarebenen von g bezüglich jener Kegel.

Jede von einem Complexkegel eingeschlossene Gerade hat deshalb mit der Singularitätenfläche des hyperbolischen Complexes mindestens zwei reelle Punkte gemein; dieselben trennen die Punkte, deren Complexkegel die Gerade einschliessen, von den übrigen Punkten der Geraden, und ihre Kegel zerfallen in je zwei reelle Ebenen. Ebenso gehen durch jede von einer Complexcurve ausgeschlossene Gerade mindestens zwei reelle singuläre Ebenen, deren Complexcurven sich auf je zwei reelle Punkte reduciren.

15. Wir bezeichnen von jetzt an mit Γ_0 einen allgemeinen quadratischen Complex ohne Doppelstrahlen, und schliessen damit die Möglichkeit aus, dass die ihn enthaltenden quadratischen Gewebe Γ einander und das Hauptgewebe H berühren. Keines dieser Gewebe Γ kann einen Büschel von Doppelcomplexen besitzen, weil sonst alle übrigen sich in den beiden speciellen Complexen dieses Büschels berühren würden.

Die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda[x] = 0$ der quadratischen Gewebe Γ hat für sechs Werthe des Parameters λ, welchen singuläre Gewebe entsprechen, eine verschwindende Discriminante. Von diesen singulären Geweben können keine zwei zusammenfallen; denn sonst wäre der ihnen beiden zugehörige Doppelcomplex sich selbst conjugirt bezüglich aller Gewebe des Γ-Büschels, insbesondere auch bezüglich des Hauptgewebes H*), er wäre folglich ein specieller Complex, und alle jene Gewebe würden sich in ihm berühren gegen die Voraussetzung. Ueberhaupt kann von den sechs Fundamentalcomplexen, d. h. von den Doppelcomplexen d der sechs durch Γ_0 gehenden singulären Gewebe, keiner ein specieller sein, weil sonst auch das Hauptgewebe H durch ihn gehen, und seine Axe folglich ein Doppelstrahl von Γ_0 sein würde.

Die sechs Fundamentalcomplexe von Γ_0 sind also alle von einander verschieden und nicht speciell. Je nachdem sie nun alle oder theilweise imaginär oder alle reell sind, und je nachdem in den letzteren beiden Fällen die verschiedenen Theile des durch Γ_0 gehenden Γ-Büschels aus hyperbolischen, parabolischen, elliptischen oder imaginären Geweben bestehen,

*) Dieses Journal Bd. 95, S. 338 No. 16.

ergiebt sich die eine oder andere der folgenden acht Hauptarten des allgemeinen quadratischen Complexes Γ_0.

16. Sind alle sechs Fundamentalcomplexe imaginär, so ist Γ_0 ein quadratischer Complex *erster* Art; er und alle ihn enthaltenden quadratischen Gewebe Γ sind hyperbolisch (9.).

Sind von den sechs Fundamentalcomplexen vier imaginär und zwei reell, so ist Γ_0 von der *zweiten* Art und parabolisch; der durch Γ_0 gehende Γ-Büschel besteht in diesem Falle aus hyperbolischen und aus parabolischen Geweben, welche durch die beiden reellen singulären Gewebe des Büschels getrennt sind (vgl. 4.).

Sind von den sechs Fundamentalcomplexen zwei imaginär und vier reell, so wird der Γ-Büschel durch seine vier reellen singulären Gewebe in vier reelle Theile zerlegt. Zwei dieser Theile enthalten lauter parabolische Gewebe; die durch sie getrennten übrigen Theile bestehen entweder beide aus hyperbolischen Geweben, oder nur der eine enthält hyperbolische, der andere dagegen ausschliesslich elliptische Complexengewebe. Im ersteren Falle ist Γ_0 von der *dritten* Art und parabolisch, im letzteren ist Γ_0 von der *vierten* Art und elliptisch.

17. Sind alle sechs Fundamentalcomplexe reell, so zerfällt der Γ-Büschel durch seine singulären Gewebe in sechs reelle Theile. Von zwei benachbarten Theilen besteht entweder der eine aus hyperbolischen und der andere aus parabolischen Geweben, oder der eine aus parabolischen und der andere aus elliptischen, oder endlich der eine aus elliptischen und der andere aus imaginären Geweben mit reellen Constanten. Da mindestens ein Theil des Büschels aus hyperbolischen Geweben besteht, so muss der ihm gegenüber liegende Theil entweder parabolische oder imaginäre Gewebe enthalten; und weil im ersteren Falle entweder in keinem oder in einem oder in zwei der übrigen Theile elliptische Gewebe sich vorfinden können, so ergeben sich folgende vier Möglichkeiten:

a) Die sechs Theile des Γ-Büschels bestehen abwechselnd aus hyperbolischen und aus parabolischen Geweben; dann ist Γ_0 ein quadratischer Complex *fünfter* Art und parabolisch.

b) Drei nicht benachbarte Theile enthalten parabolische Gewebe, zwei der übrigen bestehen aus hyperbolischen und der letzte aus elliptischen Geweben; in diesem Falle ist Γ_0 von der *sechsten* Art und elliptisch.

c) Drei nicht benachbarte Theile bestehen aus parabolischen, zwei

der übrigen aus elliptischen und der letzte aus hyperbolischen Geweben; dann ist Γ_0 von der ***siebenten*** Art und elliptisch.

d) Einer der sechs Theile des Γ-Büschels besteht aus imaginären Geweben, sodass die ihm benachbarten Theile nur elliptische, die zwei darauf folgenden lauter parabolische, und der letzte, gegenüber liegende Theil ausschliesslich hyperbolische Gewebe enthalten; dann ist Γ_0'' von der ***achten*** Art und imaginär, enthält also keine reellen Strahlen.

18. Der Uebergang zwischen den so ermittelten acht Hauptarten quadratischer Complexe wird von verschiedenen Arten besonderer Complexe gebildet, in welchen Doppelstrahlen vorkommen. Es giebt drei Hauptarten parabolischer Complexe, nämlich die zweite, dritte und fünfte, sowie drei Hauptarten elliptischer Complexe, die vierte, sechste und siebente; hyperbolisch sind nur die Complexe erster, imaginär nur diejenigen achter Art.

Jeder quadratische Complex von einer der ersten vier Hauptarten enthält dreifach unendlich viele reelle Strahlen. Sind nämlich irgend zwei der sechs Fundamentalcomplexe conjugirt-imaginär, so sind sie die Ordnungselemente eines elliptisch-involutorischen, reellen Complexenbüschels, dessen Paare zugeordneter Complexe in je einem Gewebe des Γ-Büschels liegen und sich gegenseitig trennen. Die Gewebe Γ greifen also in einander ein und durchdringen sich gegenseitig, indem jedes von ihnen zwei reelle Complexe verbindet, welche durch alle übrigen Gewebe von einander getrennt sind. Ein diese Complexe enthaltendes Complexengebüsch hat, wie mit Hülfe der früher (10.) benutzten Abbildung leicht einzusehen ist, mit jedem der Gewebe Γ zweifach unendlich viele reelle Complexe, und die in ihm enthaltene Congruenz hat folglich mit Γ_0 unendlich viele reelle Strahlen gemein. Unsere Behauptung ist damit bewiesen (vgl. 15.).

19. Wenn alle sechs Fundamentalcomplexe reell sind, lässt sich die Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda (x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6) = 0$$

des Γ-Büschels auf die Form bringen:

$$(l_1-\lambda)P_1^2 + (l_2-\lambda)P_2^2 + (l_3-\lambda)P_3^2 - (l_4-\lambda)P_4^2 - (l_5-\lambda)P_5^2 - (l_6-\lambda)P_6^2 = 0.$$

Hierin bezeichnen die l_i die sechs reellen Wurzelwerthe der Discriminante (15.). Dieselben müssen alle ungleich sein, weil keines der Gewebe Γ einen Büschel von Doppelcomplexen haben darf (15., vgl. 2.). Wird $\lambda = l_i$ oder $\lambda = \infty$ gesetzt, so repräsentirt die Gleichung eines der sechs singulären

Gewebe des Γ-Büschels resp. das Hauptgewebe H. Von den sechs linearen Complexengeweben $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, ... $P_6 = 0$ haben je fünf einen Fundamentalcomplex gemein, welcher der Träger des sechsten ist, und jedes dieser Gewebe geht durch die Träger der fünf übrigen *).

Wenn nun l_1, l_2 und l_3 alle grösser sind als l_4, l_5 und l_6, so ist der quadratische Complex Γ_0 von der achten Art; denn die obige Gleichung repräsentirt imaginäre Gewebe Γ, wenn l_1, l_2 und $l_3 > \lambda > l_4$, l_5 und l_6 ist. Sind l_1 und $l_2 > l_4 > l_3 > l_5$ und l_6, so ist Γ_0 von der siebenten Art und hat mit der linearen Congruenz $P_1 = 0$, $P_5 = 0$, $[x] = 0$ unendlich viele reelle Strahlen gemein (10.). Die letztere Bemerkung gilt auch für die folgenden beiden Fälle. Sind l_1 und $l_2 > l_4$ und l_5, diese aber $> l_3$ und l_6, so ist Γ_0 von der sechsten Art. Sind endlich l_1 und $l_4 > l_2$ und l_5, diese aber $> l_3$ und l_6, so ist Γ_0 von der fünften Art; denn wenn λ in diesem Falle alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so beschreibt Γ abwechselnd drei hyperbolische und drei parabolische Theile des Γ-Büschels. Vertauscht man die Indices 1, 2, 3 mit 4, 5, 6 oder mit einander, so erhält man aus diesen Ungleichungen andere, welche denselben Arten quadratischer Complexe entsprechen. Für jede Grössenfolge der Constanten l_i kann auf diese Weise die zugehörige Art des Complexes Γ_0 leicht ermittelt werden.

Zugleich ergiebt sich, dass jeder quadratische Complex, der zu einer der sieben ersten Hauptarten gehört, dreifach unendlich viele reelle Strahlen enthält (vgl. 18.). Nur die Complexe achter Art enthalten keine reellen Strahlen.

20. Um zu entscheiden, ob verschiedenartige Complexe dieselbe Singularitätenfläche Φ^4 haben können, gehen wir aus von den quadratischen Geweben Γ'', deren Gleichung ist:

$$\frac{P_1^2}{\lambda-l_1}+\frac{P_2^2}{\lambda-l_2}+\frac{P_3^2}{\lambda-l_3}-\frac{P_4^2}{\lambda-l_4}-\frac{P_5^2}{\lambda-l_5}-\frac{P_6^2}{\lambda-l_6} = 0.$$

Dieselben sind die Polaren der durch Γ_0 gehenden Gewebe Γ bezüglich des Hauptgewebes H, und enthalten, wie Herr *F. Klein* **) gezeigt hat, diejenigen quadratischen Complexe Γ''_λ, welche dieselbe Singularitätenfläche

*) Vgl. dieses Journal Bd. 95 S. 339.

**) *F. Klein*, zur Theorie der Liniencomplexe ersten und zweiten Grades; in den Math. Ann. II. S. 224. Vgl. dieses Journal Bd. 95 S. 344.

haben wie der soeben betrachtete Complex Γ_0. Es sei nun etwa:

$$l_1 > l_2 > l_4 > l_3 > l_5 > l_6,$$

also Γ_0 von der siebenten Art. Dann ist Γ''_λ von der fünften Art für alle Werthe von λ, welche zwischen l_1 und l_2 oder l_4 und l_3 oder l_5 und l_6 liegen (19.), weil z. B. für $l_4 > \lambda > l_3$ die Ungleichungen gelten:

$$\frac{1}{\lambda - l_3} > \frac{1}{\lambda - l_5} > \frac{1}{\lambda - l_6} > 0 > \frac{1}{\lambda - l_1} > \frac{1}{\lambda - l_2} > \frac{1}{\lambda - l_4};$$

liegt dagegen λ zwischen l_2 und l_4 oder l_3 und l_5, so ist Γ''_λ von der sechsten Art, und wird $\lambda > l_1$ oder $\lambda < l_6$ angenommen, so ist Γ''_λ von der siebenten Art.

Der Complex siebenter Art Γ_0 hat demnach mit unendlich vielen Complexen Γ''_λ siebenter, sechster und fünfter Art seine Singularitätenfläche gemein. Seine reellen Complexkegel und -Curven sind von denjenigen der zugehörigen Complexe sechster Art durch die Singularitätenfläche getrennt (12.), denn die beiden reciprok-polaren Gewebe Γ und Γ'' sind beide elliptisch, wenn λ zwischen l_2 und l_4 oder l_3 und l_5 liegt. Die Singularitätenfläche Φ^4 wird folglich von jeder Ebene in einer reellen Curve geschnitten und sendet nach jedem Punkte des Raumes einen reellen Tangentenkegel, hat aber keine reellen Doppelpunkte und Doppelebenen (12., 11.).

Von den parabolischen Complexen fünfter Art, welche Φ^4 zur Singularitätenfläche haben, müssen die Complexkegel und -Curven aller Punkte und Ebenen des Raumes reell sein. Nämlich von zwei durch Φ^4 getrennten Geraden schneidet jede unendlich viele reelle Strahlen dieser Complexe (13.), weshalb die Kegel und Curven aller ihrer Punkte und Ebenen reell sind; auf jeder Seite von Φ^4 liegen sonach Mittelpunkte reeller Complexkegel, woraus der Satz folgt.

21. Ordnen wir die Constanten l_i der Grösse nach, so ergiebt sich aus diesen und ähnlichen Erwägungen Folgendes für die letzten vier Hauptarten quadratischer Complexe.

Folgen die Constanten l_1, l_2, l_3 oder auch l_4, l_5, l_6 ungetrennt auf einander (ist z. B. $l_4 > l_1 > l_2 > l_3 > l_5 > l_6$ oder $l_1 > l_2 > l_6 > l_4 > l_5 > l_3$), so ist die Singularitätenfläche imaginär, und die zu ihr gehörigen Complexe Γ''_λ sind theils von der achten Art, also imaginär, theils von der sechsten Art.

Wenn zwei der Constanten l_1, l_2, l_3 von der dritten, nicht aber von einander getrennt sind durch l_4, l_5 und l_6 (z. B. wenn $l_4 > l_1 > l_2 > l_5 > l_3 > l_6$

oder $l_1 > l_4 > l_2 > l_5 > l_6 > l_3$), so hat die Singularitätenfläche keine reellen Doppelpunkte und Doppelebenen, wird aber von jeder Ebene in einer reellen Curve geschnitten und sendet ebenso nach jedem Punkte des Raumes einen reellen Tangentenkegel (20.); zu ihr gehören Complexe fünfter, sechster und siebenter Art.

Der mehrfach untersuchte Fall einer reellen Singularitätenfläche mit 16 reellen Doppelpunkten und 16 reellen Doppelebenen kann nur dann eintreten, wenn jede der Constanten l_1, l_2, l_3 von den beiden andern getrennt ist durch l_4, l_5 und l_6 (z. B. wenn $l_1 > l_4 > l_2 > l_5 > l_3 > l_6$). Denn in diesem Falle sind alle zugehörigen quadratischen Complexe Γ'_λ von der fünften Art, weil sie weder elliptisch noch imaginär sein können (11.), und weil ihre sechs Fundamentalcomplexe alle reell sind *).

22. Es giebt also Complexe sechster Art mit imaginären, und andere mit reellen Singularitätenflächen; die Complexkegel und ebenen Complexcurven der ersteren sind alle reell (12., 19.), während bei den letzteren die Mittelpunkte ihrer reellen Kegel und die Ebenen ihrer reellen Complexcurven von den übrigen Punkten resp. Ebenen des Raumes durch die Singularitätenfläche getrennt sind.

Ebenso giebt es zweierlei Complexe fünfter Art; die Singularitätenflächen der einen haben sechzehn, die der andern haben gar keine reelle Doppelpunkte und Doppelebenen, sind aber gleichwohl reell. Von den letzteren Complexen sind alle Kegel und ebenen Curven reell (20.), und diejenigen singulärer Punkte oder Ebenen zerfallen demgemäss in je zwei reelle Ebenen resp. Punkte; die ersteren Complexe fünfter Art dagegen enthalten wahrscheinlich auch imaginäre Kegel und Curven.

Alle Complexe siebenter Art haben Singularitätenflächen, welche von jeder Ebene in reellen Curven geschnitten werden und deren Doppelpunkte und Doppelebenen alle imaginär sind (20.). Von den Complexen achter Art sind alle Strahlen und zugleich die Singularitätenflächen imaginär (11.).

23. Ein Complex erster oder zweiter Art kann nur mit gleichartigen Complexen die Singularitätenfläche gemein haben, weil seine sechs Fundamentalcomplexe alle resp. bis auf zwei imaginär sind (16.). Die Singularitätenfläche kann vier reelle Doppelpunkte (und Doppelebenen) besitzen **), und ist bei dem Complexe erster Art allemal reell (14.).

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. 86 S. 209—212.

**) S. dieses Journal Bd. 86 S. 106.

Es giebt zweierlei Complexe dritter Art, nämlich solche, welche nur mit gleichartigen, und andere, welche mit Complexen dritter und vierter Art ihre Singularitätenfläche gemein haben. (Wegen des Beweises vgl. 20.) Die letzteren Complexe dritter Art haben lauter reelle Kegel und reelle ebene Curven; ihre Singularitätenflächen werden von jeder Ebene in reellen Curven geschnitten, und haben keine reellen Doppelpunkte und Doppelebenen. Die ersteren Complexe dritter Art enthalten wahrscheinlich auch imaginäre Kegel mit reellen Mittelpunkten, und ihre Singularitätenflächen können je acht reelle Doppelpunkte und Doppelebenen besitzen *).

24. Wenn wir mit Rücksicht auf die Singularitätenflächen die Complexe dritter, fünfter und sechster Art in je zwei verschiedene Arten eintheilen, so erhalten wir statt der bisherigen acht nunmehr eilf Hauptarten der allgemeinen quadratischen Complexe. Darunter giebt es eine Art hyperbolischer Complexe (I), fünf Arten parabolischer (II, III_a, III_b, V_a und V_b), vier Arten elliptischer (IV, VI_a, VI_b und VII), und eine Art imaginärer Complexe (VIII). Von dreien dieser eilf Arten, nämlich von III_b, V_b und VI_b, sind die Complexkegel und -Curven aller reellen Punkte und Ebenen des Raumes reell.

Zwei quadratische Complexengewebe, welche reciproke Polaren sind bezüglich des Hauptgewebes H, enthalten, wenn sie hyperbolisch oder imaginär sind, allemal gleichartige Complexe; nur wenn sie parabolisch oder elliptisch sind, können sie ungleichartige Complexe enthalten.

---

*) S. dieses Journal Bd. 86, S. 106.

Strassburg i. E. im October 1884.

Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de *Kummer*.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *Th. Reye* par M. *Corrado Segre.*)

Dans votre mémoire sur les courbes asymptotiques de la surface de *Kummer* *) j'ai remarqué surtout le théorème suivant, d'où vous parvenez au résultat que chacune de ces courbes est la base d'un faisceau de surfaces du 4e ordre:

Un plan singulier d'un complexe quadratique quelconque Γ_0, dont la droite singulière correspondante soit tangente principale de la surface singulière Φ_0^4 de ce complexe, est aussi singulier pour le complexe quadratique infiniment voisin appartenant au faisceau des complexes quadratiques Γ_ν qui passent par la congruence des droites singulières de Γ_0; et réciproquement.

Vous en donnez une démonstration analytique un peu longue et compliquée, et je ne sais si vous avez vu qu'on peut aussi le démontrer synthétiquement de la façon fort simple suivante.

Dans un plan singulier quelconque π de Γ_0 soient A, B les centres des deux faisceaux de droites de ce complexe et P le point singulier correspondant à la droite singulière AB, c'est-à-dire le point de contact de π avec Φ_0^4. Le point P' conjugué harmonique de P par rapport à A et B sera le point de contact de la droite AB avec la série des coniques, situées dans π, du faisceau des complexes Γ_ν. Dans cette série de coniques (ayant encore deux autres tangentes communes qui passent resp. par A et B) il n'y a que deux coniques décomposées en couples de points, c'est-à-dire le couple AB, qui appartient à Γ_0, et le couple composé de P' et d'un autre point, couple qui appartient à un certain Γ_ν dont π est aussi plan singulier. Donc si ce Γ_ν est infiniment voisin à Γ_0, et

*) *Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven.* (Dieses Journal, Bd. 97, pag. 242.)

seulement alors, le second couple de points devra coïncider avec le premier, P' coïncidera avec A ou B, et en conséquence aussi P coïncidera avec A ou B, c'est-à-dire la droite singulière AB qui correspond à π sera tangente principale de Φ_0^4. — Votre théorème est donc prouvé.

Ce théorème a lieu pour toutes les particularisations de la surface de *Kummer* Φ_0^4; mais avez-vous vu comment les lignes asymptotiques se décomposent dans les cas particuliers? Voici comment j'y parviens. On a très-facilement (par exemple par les méthodes dont j'ai fait usage dans ma dissertation *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* *)) la proposition suivante:

Les complexes quadratiques Γ_ν passant par la congruence singulière d'un complexe quadratique quelconque Γ_0 ont les mêmes complexes linéaires fondamentaux, et en particulier les mêmes droites doubles que celui-ci.

Que l'on applique donc votre théorème aux différentes espèces particulières de complexes quadratiques en tenant toujours compte de cette proposition, et l'on verra à quoi se réduisent les lignes asymptotiques des différents cas particuliers de la surface de *Kummer*. — Voici quelques exemples.

Les lignes asymptotiques de la surface singulière de complexes [21111], c'est-à-dire de la *„Complexfläche"* générale de *Plücker*, sont les intersections de cette surface avec des surfaces infiniment voisines de la même espèce, ayant la même droite double. Donc elles sont des courbes du 12e ordre et de la 12e classe, ayant sur la droite double de la surface 4 points doubles (et *n'appartenant pas* à des surfaces cubiques).

Les lignes asymptotiques de la surface singulière de complexes [2211], c'est-à-dire de la surface quartique à deux droites doubles incidentes et 4 points coniques, sont les intersections de cette surface avec des surfaces infiniment voisines et de la même espèce, ayant les mêmes droites doubles. Donc elles sont d'ordre et classe 8, et elles appartiennent à des surfaces cubiques passant par les deux droites doubles (mais *non pas* à des quadriques).

Il y a deux espèces réciproques de complexes quadratiques [222] et l'on trouve ainsi:

Les lignes asymptotiques de la surface cubique à 4 points coniques (réciproque de la surface de *Steiner*) sont les intersections de celle-ci avec

---

*) Memorie della R. Acc. d. scienze di Torino, serie II, t. 36.

des surfaces cubiques contenant les 3 droites d'elle qui ne passent par aucun point double. Donc elles sont du 6e ordre (et 4e classe) et elles seront aussi les intersections de la surface donnée avec des quadriques.

Les lignes asymptotiques de la surface de *Steiner* du 4e ordre à 3 droites doubles sont les intersections d'elle avec d'autres surfaces de *Steiner* ayant les mêmes droites doubles, c'est-à-dire elles sont des courbes du 4e ordre (de 2e espèce), ayant ces 3 droites pour cordes, et ayant leurs développables de la 6e classe et circonscrites à des quadriques.

Remarquez comment ces dernières propositions sur la surface de *Steiner* et sur les quartiques gauches de 2e espèce, propositions connues, mais de démonstration directe assez difficile, découlent immédiatement de votre théorème et de la proposition que je vous ai énoncée.

Il y aurait encore d'autres cas particuliers de la surface de *Kummer* à examiner, mais je me borne à ces exemples, d'autant plus que pour les surfaces réglées on n'obtient rien de remarquable. Naturellement la même méthode donnerait dans chaque cas ces lignes asymptotiques particulières qui correspondent aux complexes fondamentaux (non spéciaux) de la surface et qui sont les lieux des points doués de tangentes quadriponctuelles.

Turin, le 24 octobre 1884.

Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

III. Artikel.

Die dreibündig-eindeutige Verwandtschaft zwischen drei ebenen Punktsystemen und ihre Beziehungen zur quadratischen und zur projectiv-trilinearen Verwandtschaft.

Hierzu Tafel II, Fig. 1—6.

(Von Herrn *Guido Hauck*.)

---

§ 1.

Exposition.

Zufolge der Resultate des II. Artikels *) ist die *projectiv-trilineare Verwandtschaft* zwischen drei ebenen Punktsystemen S, S', S'' (vgl. Fig. 1) bestimmt durch die drei mal zwei *Kernpunkte* p und q, p' und q', p'' und q'', von denen wir q und p', q' und p'', q'' und p je als *gegnerische* Kernpunkte bezeichnen, und ferner durch die drei projectivischen Beziehungen zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln (das heisst zwischen den Strahlenbüscheln, deren Centren je zwei gegnerische Kernpunkte bilden). In denselben figuriren die Verbindungslinien der Kernpunkte pq, $p'q'$, $p''q''$ (*Hauptaxen*) je als entsprechende Strahlen. Für die Zuordnung der Punkte der drei Ebenen besteht die Beziehung, dass von einem Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' je zwei auf entsprechenden Strahlen der bezüglichen gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen müssen. — Fig. 1 zeigt die drei Systeme *in ebener orientirter Lage* (im weiteren Sinn), das heisst in einer Lage, bei welcher je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch sind. — Drei gemäss dieser Definition auf einander bezogene ebene Punktsysteme können in gestaltlicher Beziehung stets als verschiedene Projectionen eines und desselben Original-Punktsystems angesehen werden.

---

*) S. dieses Journal Bd. 97, S. 261.

Mit Rücksicht hierauf wurde die in Rede stehende Verwandtschaft als *projectiv-trilineare* Verwandtschaft bezeichnet.

Ehe die Eigenschaften der also charakterisirten *projectiv-trilinearen* Verwandtschaft weiter verfolgt werden, ist vor allem die Frage zu erledigen, ob dieselbe wirklich den allgemeinsten Fall der *dreibündig-trilinearen* Verwandtschaft repräsentirt.

Versteht man nämlich unter dem allgemeinen Begriff der *dreibündigen Verwandtschaft zwischen drei ebenen Punktsystemen* denjenigen Verwandtschaftstypus, bei welchem die Punkte dreier Ebenen vermöge dreier von einander unabhängigen Bedingungen auf einander bezogen sind: so mag zunächst als *dreibündig-eindeutige* Verwandtschaft diejenige Verwandtschaft bezeichnet werden, in welcher die Punkte dreier Ebenen durch die einzige Bedingung der eindeutigen Zuordnung dreifach gebunden sind. Von dieser repräsentirt dann die allgemeine *dreibündig-trilineare* Verwandtschaft einen speciellen Fall, welcher durch das Hinzufügen der weiteren Forderung bedingt wird, dass den in zwei geraden Linien liegenden Punkten zweier Ebenen in der dritten Ebene stets Punkte zugeordnet sein sollen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Es fragt sich, ob die also definirte *allgemeine dreibündig-trilineare* Verwandtschaft identisch ist mit der oben gekennzeichneten *projectiv-trilinearen* Verwandtschaft.

Die Beantwortung dieser Frage macht die vorherige Untersuchung der allgemeinen *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft nothwendig.

Aus dem Gesagten erhellt, dass sich diese *dreibündig-eindeutige* Verwandtschaft zur *dreibündig-trilinearen* Verwandtschaft genau ebenso verhält, wie sich die *quadratische* Verwandtschaft zur *collinearen* (oder *bilinearen*) Verwandtschaft verhält. Während einerseits die *dreibündig-eindeutige* Verwandtschaft die *trilineare* Verwandtschaft als Specialfall in sich schliesst, ebenso wie die *quadratische* Verwandtschaft die *Collineation* als Specialfall enthält, ist andererseits die *Collineation* in der *trilinearen* Verwandtschaft — und ebenso die *quadratische* Verwandtschaft in der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft als Specialfall einbegriffen.

Diese letztere Beziehung ist zunächst bei der *projectiv-trilinearen* und *collinearen* Verwandtschaft leicht nachzuweisen. Beschränkt man nämlich in einem der drei *trilinearen* Systeme — z. B. S'' — die Punkte auf eine einzige gerade Linie $\mathfrak{h}''$ (vgl. Fig. 1), so werden dadurch die Punkte in den zwei andern Systemen S' und S eindeutig auf einander bezogen im

Sinne der *collinearen* Verwandtschaft. Befinden sich die drei ebenen Systeme in räumlich-orientirter Lage, in welcher sie sich auch in Beziehung auf die Lage als Projectionen eines und desselben räumlichen Punktsystems darstellen, so können die zwei Systeme S und S' aufgefasst werden als die Projectionen der durch die Linie $\mathfrak{h}''$ und das zugehörige Projectionscentrum O_2 gelegten Ebene. — Es sind nunmehr die zwei Strahlenbüschel p'' und q'' (vgl. Fig. 1) perspectivisch zu der Punktreihe $\mathfrak{h}''$; da aber Strahlenbüschel p'' projectivisch zu q' — und q'' projectivisch zu p ist, so ist auch p projectivisch zu q'. Von den Kernstrahlenbüscheln der zwei Ebenen S und S' sind somit je zwei projectivisch: p zu q' und q zu p', und zwar so, dass für beide Büschelpaare die Verbindungslinien der Kernpunkte pq und $p'q'$ als entsprechende Strahlen figuriren. Zu einem Punkt x' der Ebene S' ergiebt sich der zugeordnete Punkt x der Ebene S als Schnittpunkt der zwei Strahlen der Büschel p und q, welche beziehungsweise den Strahlen $q'x'$ und $p'x'$ entsprechen.

Diese Bestimmungsart der collinearen Verwandtschaft ist keine andere als diejenige, welche *Seydewitz* in seinem Aufsatze „Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projectivischer Gebilde"*) als Ausgangspunkt für die Betrachtung der collinearen Verwandtschaft benutzt hat. Durch Verallgemeinerung derselben in der Art, dass in den zwei projectivischen Büschelpaaren die Verbindungslinien der Kernpunkte pq und $p'q'$ nicht als entsprechende Strahlen figuriren, gelangt man zu der *quadratischen* Verwandtschaft.

Es liegt nun der Gedanke nahe, in ganz derselben Weise auch eine Verallgemeinerung des Bestimmungsmodus der *projectiv-trilinearen* Verwandtschaft zu versuchen, also unter Beibehaltung des übrigen Zuordnungsmechanismus eine Aenderung in der Art vorzunehmen, dass die Hauptaxen jetzt nicht mehr entsprechende Strahlen je zweier gegnerischen Kernstrahlenbüschel bilden. Man möchte vermuthen, man werde auf diese Weise zu der allgemeinen *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft gelangen. Diese Vermuthung bestätigt sich indessen nicht. Vielmehr ergiebt sich, dass man durch das angedeutete Verfahren nicht den allgemeinsten —, sondern nur einen speciellen Fall der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft erhält, — (ein Ergebniss, das beiläufig den Zweifel verstärkt, ob unser seitheriger

*) S. *Grunerts Archiv für Mathematik und Physik*, 1846, 7. Theil S. 113 und 8. Theil S. 1.

Bestimmungsmodus der *trilinearen* Verwandtschaft wirklich den allgemeinsten Fall dieser Verwandtschaft darstellt).

Indem wir nun im folgenden von der allgemeinsten Definition der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft ausgehen, werden wir zunächst die Grundeigenschaften dieser Verwandtschaft entwickeln, um dann von hier aus durch successive Specialisirung zuerst zu dem letzterwähnten besonderen Fall und weiterhin zur *trilinearen* Verwandtschaft überzugehen. Wir verfolgen dabei die Eigenschaften der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft nur so weit, als es zu dem angedeuteten Zweck erforderlich ist.

§ 2.

Die allgemeine dreibündig-eindeutige Verwandtschaft.

Die Punkte dreier ebenen Systeme S, S', S'' mögen in der Art *dreifach gebunden* sein, dass zu zwei Punkten irgend zweier Systeme jedesmal der zugeordnete dritte Punkt des dritten Systems *eindeutig* bestimmt ist.

Aus den drei Gleichungen, durch welche demgemäss bei analytischer Behandlung die drei Coordinatenpaare $x\,y$, $x'\,y'$, $x''\,y''$ dreier zugeordneten Punkte gebunden sein müssen, kann ein Coordinatenpaar eliminirt werden. Eliminirt man zuerst das Paar xy, dann $x'y'$, endlich $x''y''$, so erhält man drei neue Gleichungen, von welchen

die I. nur x', y' und x'', y'' —,
- II. - x'', y'' - x, y —,
- III. - x, y - x', y'

enthält. Es besteht folglich zwischen je zweien von drei zugeordneten Punkten eine bestimmte Beziehung. Sind dann in zwei Ebenen — z. B. S' und S'' — zwei Punkte gegeben, deren Coordinaten x', y' und x'', y'' der Beziehung I. genügen, so bestimmen sich die Coordinaten x, y des dritten zugeordneten Punktes aus den zwei Gleichungen II. und III. Da diese Bestimmung der Voraussetzung gemäss eine eindeutige sein soll, so folgt, dass letztere zwei Gleichungen nach x und y linear sein müssen. Ganz ebenso ergiebt sich, dass die zwei Gleichungen III. und I. nach x' und y', sowie die zwei Gleichungen I. und II. nach x'' und y'' linear sein müssen.

Nun drückt aber eine Gleichung, welche nach jeder der zwei mal zwei variabeln Coordinaten der Punkte zweier Ebenen linear ist, eine Beziehung zwischen diesen zwei Ebenen aus, welche keine andere als die-

jenige der allgemeinen Reciprocität ist. Mit jenen drei Gleichungen sind somit drei Reciprocitätsbeziehungen gegeben, die zwischen je zweien der drei Systeme S, S', S'' obwalten und die wir kurz als die Reciprocitätsbeziehungen $S'S''$ —, $S''S$ —, SS' bezeichnen wollen. Zwischen je zwei Punkten eines Tripels zugeordneter Punkte besteht die Beziehung, dass jeder auf der Polaren des andern in Bezug auf die Reciprocitätsbeziehung der betreffenden Ebenen liegen muss. Unter der specifischen Bezeichnung *zugeordnete Punkte* wollen wir im folgenden stets und ausschliesslich solche Punkte verstehen, bei welchen diese letztere Bedingung zutrifft. Sind in zwei Ebenen — z. B. S' und S'' — zwei solche *zugeordnete* Punkte x' und x'' (von welchen also jeder auf der Polaren des andern in Bezug auf die Reciprocitätsbeziehung $S'S''$ liegt) gegeben: so erhält man den das Tripel schliessenden *dritten zugeordneten* Punkt x der Ebene S, indem man zu x' die Polare in Bezug auf die Reciprocitätsbeziehung $S'S$ — und zu x'' die Polare in Bezug auf $S''S$ construirt und den Schnittpunkt dieser zwei Polaren als Punkt x markirt.

§ 3.

Die Hauptkegelschnitte.

Es wirft sich die Frage auf, ob und unter welchen Umständen bei der am Schluss des vorigen Paragraphen genannten Construction es geschehen kann, dass die zu zwei zugeordneten Punkten x' und x'' in der dritten Ebene construirten Polaren zusammenfallen, so dass ihr Schnittpunkt x unbestimmt wird und also jeder beliebige Punkt der betreffenden Geraden den Punkten x' und x'' als dritter zugeordneter entsprechen kann.

Es ist sofort ersichtlich, dass zu jedem Punkt x' ein ganz bestimmter Punkt x'' existirt, dessen Polare in Bezug auf $S''S$ mit der Polaren von x' in Bezug auf $S'S$ zusammenfällt. Man findet ihn, indem man zuerst die Polare von x' in Bezug auf $S'S$ und dann zu letzterer den Pol x'' in Bezug auf SS'' construirt. Die Punkte x' und x'' der Systeme S' und S'' werden dadurch paarweise auf einander bezogen, und zwar ist diese Beziehung eine collineare, da jedes der genannten Punktsysteme S' und S'' reciprok ist zu dem Geradensystem S. — Indessen repräsentirt nicht ein jedes Punktepaar x', x'' dieser collinearen Paarung zugleich auch ein *zugeordnetes* Punktepaar im Sinne der dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft. Es handelt sich also des weiteren darum, von sämmtlichen Punktepaaren

x', x'' der collinearen Paarung diejenigen auszusondern, für welche die Zuordnungsbedingung (nämlich: dass der eine Punkt x' auf der Polaren des andern x'' liegt) erfüllt ist.

Denkt man sich zu diesem Behufe zu jedem Punkte x'' die Polare in der Ebene S' construirt, so bilden diese sämmtlichen Polaren ein ebenes Geradensystem, das durch Σ' bezeichnet werden mag. Dasselbe ist reciprok zu dem Punktsystem S'' und folglich auch reciprok zu dem mit S'' collinearen Punktsystem S'. Σ' und S' bilden also zwei in einander liegende reciproke Systeme, für welche die gesuchten besonderen Punkte x', die auf den Polaren der entsprechenden Punkte x'' liegen, die Rolle von ***incidenten Elementen*** spielen. Nun erfüllen bekanntlich *) die incidenten Punkte einen Kegelschnitt, welcher reell oder imaginär sein kann. Von den zugehörigen, durch sie gehenden Polaren wird ferner ein — reeller oder imaginärer — Kegelschnitt umhüllt, welcher innerhalb des erstgenannten Kegelschnittes liegt und mit diesem in doppelter reeller oder imaginärer Berührung steht. Wir bezeichnen den äussern Kegelschnitt durch K', den innern durch $\mathfrak{K}'$.

In der schematischen Fig. 2. sei m' ein Punkt des äusseren Kegelschnitts K', n'' der vermöge der collinearen Paarung ihm entsprechende Punkt des Systems S'', ferner $\mathfrak{n}'$ die durch m' gehende und den innern Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ berührende Polare von n'', und $\mathfrak{m}''$ die durch n'' gehende Polare von m' **).

Es entsprechen nun den sämmtlichen Punkten m' des Kegelschnittes K' im Systeme S'' (vermöge der collinearen Paarung) Punkte n'', die auf einem Kegelschnitt K'' liegen. Durch jeden derselben geht die Polare $\mathfrak{m}''$ des entsprechenden Punktes m', und alle diese Polaren hüllen wieder einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}''$ ein, der innerhalb K'' liegt und mit diesem in doppelter reeller oder imaginärer Berührung steht.

Die Punkte der zwei äusseren Kegelschnitte sind projectivisch auf einander bezogen; je zwei entsprechende Punkte m' und n'' können in Hinsicht auf die dreibündig-eindeutige Verwandtschaft als *zugeordnete* Punkte

---

*) Vergl. *Seydewitz*, a. a. O. § 31, 9—11; ferner: *H. Schröter:* „Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume“. Dieses Journal, Band 77, S. 105.

**) Wir bezeichnen im folgenden durchweg die Punkte mit lateinischen, die ihnen zugehörigen Polaren mit den gleichlautenden deutschen Buchstaben und deuten die Ebene, welcher die Punkte und Linien angehören, durch entsprechende Accentuirung an.

genommen werden und haben dann die Besonderheit, dass ihre beiderseitigen Polaren in der Ebene S zusammenfallen, dass also der das Tripel schliessende dritte zugeordnete Punkt unbestimmt ist. Diese letztgenannten *Doppelpolaren*, welche die Doppelbezeichnung $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ erhalten mögen, müssen in der Ebene S wieder einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umhüllen. Denn ihre Pole liegen auf einem solchen.

Wir bezeichnen die Punkte der Kegelschnitte K' und K'' als *Hauptpunkte* —, die Tangenten der Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ als *Hauptlinien* der betreffenden Ebenen. Je zwei Hauptpunkte m' und n'', welche sich in der genannten Weise entsprechen, bezeichnen wir als zu einander und zu der ihre gemeinschaftliche Polare vorstellenden Hauptlinie $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ *conjugirt*.

Auf ähnliche Weise erledigt sich auch die umgekehrte Frage nach solchen Geraden der Systeme S' und S'', von denen jede durch den Pol der andern geht und denen in S ein und derselbe Punkt als *Doppelpol* entspricht.

Theilt man zunächst je zwei Gerade $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$, welche in S denselben Punkt x zum Pol haben, einander zu, so werden dadurch die Geraden in S' und S'' collinear gepaart. Um hierauf von diesen sämmtlichen Geradenpaaren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ diejenigen auszusondern, die der Bedingung genügen, dass $\mathfrak{x}'$ durch den Pol von $\mathfrak{x}''$ geht, denke man sich zu jeder Geraden $\mathfrak{x}''$ den Pol in S' construirt: die Gesammtheit dieser Pole bildet dann das ebene Punktsystem Σ', welches reciprok zu dem Geradensystem S'' und folglich auch reciprok zu dem mit S'' collinearen Geradensystem S' ist. In den zwei in einander liegenden reciproken Systemen Σ' und S' spielen nun die besonderen Geraden $\mathfrak{x}'$, die durch die Pole der entsprechenden Geraden $\mathfrak{x}''$ gehen, wieder die Rolle von incidenten Elementen. Dieselben müssen also wieder den Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ berühren, und die zugehörigen in sie fallenden Pole müssen auf dem Kegelschnitt K' liegen. Während jedoch (s. Fig. 2) bei der vorherigen Betrachtung dem Punkt m' als dem System S' angehörig die Gerade $\mathfrak{n}'$ als Reciproke entsprach, so fällt nunmehr dem Punkt m' als dem System Σ' angehörig die andere von m' an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$ gehende Tangente $\mathfrak{l}'$ als Reciproke zu. $\mathfrak{l}'$ bildet sonach zusammen mit $\mathfrak{m}''$ ein Paar solcher Geraden, von denen jede durch den Pol der andern geht und welchen in S ein und derselbe Punkt als Pol entspricht. Letzterer muss auf der Polaren $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ von m' und n'' liegen und mag durch l bezeichnet werden. Der Geraden $\mathfrak{m}''$ fügen wir als der Polaren von l in Bezug auf SS'' noch die Nebenbenennung $\mathfrak{l}''$ zu.

Ganz ebenso ergiebt sich, dass die von n'' an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}''$ gehende zweite Tangente, die durch $\mathfrak{o}''$ bezeichnet werden mag, zusammen mit $\mathfrak{n}'$ ein Paar von Geraden bildet, von denen jede durch den Pol der andern geht und denen in S ein und derselbe, auf $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ liegende Punkt o als Pol entspricht. Der Geraden $\mathfrak{n}'$ mag mit Beziehung hierauf noch die Nebenbenennung $\mathfrak{o}'$ zugefügt werden.

Die sämmtlichen Punkte l, o, ..., welche in S die Bedeutung von Doppelpolen haben, müssen auf einem Kegelschnitt K liegen, der mit $\mathfrak{K}$ in doppelter reeller oder imaginärer Berührung steht; denn $\mathfrak{K}$, K ist reciprok zu $K'\mathfrak{K}'$ und K'', $\mathfrak{K}''$.

Die Doppelpole als solche werden im folgenden zunächst keine so wesentliche Rolle spielen wie die Doppelpolaren. Dagegen ergiebt sich aus der vorangegangenen Betrachtung nunmehr leicht, dass ganz dieselben Beziehungen, die oben zwischen den Hauptpunkten und Hauptlinien der Kegelschnitte K', K'' und $\mathfrak{K}$ klargelegt wurden, auch zwischen den äusseren Kegelschnitten K, K' und dem inneren $\mathfrak{K}''$, sowie zwischen den äusseren K, K'' und dem inneren $\mathfrak{K}'$ obwalten.

So sind z. B. die zwei Punkte l und m' auf K und K' zugeordnete Punkte, insofern jeder auf der Polaren des andern liegt; ihre beiderseitigen Polaren in S'' fallen zusammen in die Hauptlinie $\mathfrak{l}'', \mathfrak{m}''$. Es stellen also l und m' zwei *conjugirte Hauptpunkte* der Ebenen S und S' vor, denen in der dritten Ebene S'' die $\mathfrak{l}'', \mathfrak{m}''$ als *conjugirte Hauptlinie* entspricht. In gleicher Weise stellen o und n'' zwei conjugirte Hauptpunkte der Ebenen S und S'' vor, denen in der Ebene S' die $\mathfrak{o}', \mathfrak{n}'$ als conjugirte Hauptlinie entspricht.

Man beachte wohl, dass zweien conjugirten Hauptpunkten m' und n'' in der dritten Ebene S im allgemeinen zwei verschiedene Punkte als conjugirte Hauptpunkte entsprechen; dem Punkt m' ist l, dem Punkt n'' ist o conjugirt. Man bemerke ferner, dass die den zwei conjugirten Hauptpunkten m' und n'' conjugirte Hauptlinie $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ identisch ist mit der Verbindungslinie lo jener beiden zu m' und n'' einzeln conjugirten Punkte l und o. Nur in den Berührungspunkten zwischen den äusseren und inneren Kegelschnitten (sofern die Berührung eine reelle ist) findet ein Zusammenfallen der Punkte l und o statt.

Im allgemeinen wäre es daher falsch, zu schliessen: wenn n'' conjugirt m', und m' conjugirt l, so werde auch l conjugirt n'' sein. Dem

Punkt l entspricht vielmehr als conjugirter in S'' der zweite Schnittpunkt k'' der Hauptlinie $\mathfrak{l}'', \mathfrak{m}''$ mit dem Kegelschnitt K''. Ebenso entspricht dem Punkt o als conjugirter in S' der zweite Schnittpunkt p' der Hauptlinie $\mathfrak{o}', \mathfrak{n}'$ mit dem Kegelschnitt K'. — Die Bezeichnung ist so gewählt, dass immer und ausschliesslich zwei solche Hauptpunkte conjugirt sind, die mit zwei im Alphabet auf einander folgenden Buchstaben versehen sind.

Es ist leicht, die Reihe der conjugirten Hauptpunktepaare $k''lm'n''op'$ nach beiden Seiten hin fortzusetzen. Zu p' ist conjugirt der zweite Schnittpunkt q'' der Hauptlinie $\mathfrak{o}''$ mit K''. Zu q'' ist conjugirt der Schnittpunkt r der andern von o an $\mathfrak{K}$ gelegten Tangente mit K; zu r — der Schnittpunkt s' der andern von p' an $\mathfrak{K}'$ gelegten Tangente mit K'; u. s. f. (vgl. Fig. 2). Ebenso ist die Fortsetzung der Reihe nach der andern Seite hin ($i'hg''f'$) in der Fig. angedeutet.

Fassen wir das Resultat der ganzen Betrachtung zusammen, so hat sich folgendes ergeben (vgl. Fig. 2):

In jeder der drei Ebenen $S, S' S''$ liegen zwei reelle oder imaginäre Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$, bezw. K' und $\mathfrak{K}'$, K'' und $\mathfrak{K}''$, von welchen jedesmal der äussere K, bezw. K', K'' den inneren $\mathfrak{K}$, bezw. $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ in doppelter (reeller oder imaginärer) Berührung umschliesst und welche wir die zwei *Hauptkegelschnitte* der betreffenden Ebene nennen. Von den Punkten der drei äusseren und den Tangenten der drei inneren Hauptkegelschnitte, welche wir die *Hauptpunkte* und *Hauptlinien* der betreffenden Ebenen nennen, sind jedesmal die Hauptpunkte zweier Ebenen und die Hauptlinien der dritten Ebene projectivisch auf einander bezogen. Je drei vermöge dieser Beziehungen einander entsprechende Kegelschnittelemente (2 Punkte, 1 Tangente) bezeichnen wir als einander *conjugirt*. Bezüglich dieser conjugirten Hauptpunkte und Hauptlinien gelten nun folgende Sätze:

1. *Jedem Hauptpunkt einer Ebene entspricht in jeder der zwei andern Ebenen ein ihm conjugirter Hauptpunkt und eine ihm conjugirte Hauptlinie. Die conjugirte Hauptlinie stellt seine Polare in der betreffenden Ebene vor und geht durch den conjugirten Hauptpunkt der betreffenden Ebene.*

2. *Je zwei conjugirte Hauptpunkte können als zugeordnete Punkte der betreffenden Ebenen fungiren. Ihre Polaren in Bezug auf die dritte Ebene fallen in eine Gerade zusammen, welche durch die conjugirte Hauptlinie der dritten Ebene repräsentirt wird und welche durch die den zwei Hauptpunkten*

in der dritten Ebene conjugirten Hauptpunkte geht. Der zweien conjugirten Hauptpunkten zugeordnete dritte Punkt ist demgemäss unbestimmt; jeder Punkt der conjugirten Hauptlinie der dritten Ebene kann als solcher fungiren.

Als Corollar zu 2. lässt sich sofort der umgekehrte Satz aussprechen:

3. *Fällt von den drei Punkten eines zugeordneten Punkte-Tripels einer in einen Hauptpunkt, der zweite aber nicht: so muss der dritte in den dem ersten conjugirten Hauptpunkt der dritten Ebene fallen.*

Denn (vgl. Fig. 2) fällt z. B. x' in den Hauptpunkt m' und liegt x beliebig auf der Polaren $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ von m', so muss in der dritten Ebene S'' einerseits die Polare von x durch den Pol n'' von $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ gehen, andererseits geht auch die Polare $\mathfrak{m}''$ von m' durch n''; somit schneiden sich die beiderseitigen Polaren von x und m' in dem zu m' conjugirten Hauptpunkt n''.

Man bemerke endlich noch, dass wenn die drei äusseren Hauptkegelschnitte und die drei projectivischen Beziehungen zwischen den Punkten je zweier derselben bekannt sind, damit auch (gemäss Satz 2) die drei inneren Kegelschnitte nebst deren projectivischen Beziehungen bestimmt sind, und umgekehrt.

§ 4.

Constructionen an den Hauptkegelschnitten.

Sind die drei Reciprocitätsbeziehungen zwischen den drei ebenen Systemen S, S', S'' gegeben, so sind damit die drei mal zwei Hauptkegelschnitte nebst der dreifachen projectivischen Zuordnung ihrer Punkte und Tangenten bestimmt. Wir setzen im folgenden die Curven als reell voraus und nehmen an, dieselben seien gegeben, bezw. construirt, und die projectivischen Beziehungen seien festgestellt, so dass zu jedem Hauptpunkt oder zu jeder Hauptlinie einer Ebene die ihnen in den zwei andern Ebenen conjugirten Hauptpunkte und Hauptlinien jederzeit leicht markirt werden können.

Abweichend von der im vorigen Paragraphen angewendeten Bezeichnungsweise werden wir im folgenden, wo es nicht zu Missverständnissen führen kann, zwei conjugirte Hauptpunkte mit gleichlautenden lateinischen Buchstaben bezeichnen. Es ist aber hierbei insofern Vorsicht zu beobachten, als nicht umgekehrt geschlossen werden darf, dass zwei mit gleichlautenden Buchstaben versehene Hauptpunkte stets conjugirt seien. Denn ist z. B. dem Hauptpunkt k in S einerseits k' in S' —, andererseits k'' in S'' conjugirt, so sind k' und k'' im allgemeinen nicht unter sich conjugirt.

Obiges vorausgesetzt — erledigen sich nun die Fundamentalaufgaben der dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft mit Hilfe der Hauptkegelschnitte auf folgende Weise:

1. *a*) Um zu einem Punkt — z. B. x'' der Ebene S'' (vgl. Fig. 3) — die Polaren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}$ in den zwei andern Ebenen zu construiren, zieht man von x'' die zwei Tangenten $\mathfrak{k}''$ und $\mathfrak{l}''$ an den zugehörigen inneren Hauptkegelschnitt $\mathfrak{K}''$ und markirt deren conjugirte Hauptpunkte k' und l' in S', k und l in S: so repräsentiren deren Verbindungslinien $k'l'$ und kl die Polaren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}$ von x'' in Bezug auf die Ebenen S' und S. (Denn k' und l' sind die Pole von $\mathfrak{k}''$ und $\mathfrak{l}''$; aus: x'' auf $\mathfrak{k}''$ und $\mathfrak{l}''$ — folgt aber: $\mathfrak{x}'$ durch k' und l'.) Also:

Die beiderseitigen Polaren eines Punktes schneiden die betreffenden äusseren Hauptkegelschnitte in conjugirten Hauptpunkten, welche den durch den Punkt gehenden zwei Hauptlinien conjugirt sind.

1. *b*) Um zu einer Geraden — z. B. $\mathfrak{h}''$ der Ebene S'' (vgl. Fig. 4) die Pole h' und h in den zwei andern Ebenen zu construiren, markirt man die zwei Schnittpunkte k'' und m'' der $\mathfrak{h}''$ mit dem zugehörigen äusseren Hauptkegelschnitt K'' und bestimmt deren conjugirte Hauptlinien $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{m}'$ in S', $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}$ in S: so repräsentiren deren Schnittpunkte die verlangten Pole h' und h. (Denn aus: k'' und m'' auf $\mathfrak{h}''$ — folgt: $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{m}'$ durch h'.) Also:

Durch die beiderseitigen Pole einer Geraden gehen je zwei Hauptlinien, welche den zwei Schnittpunkten der Geraden mit dem betreffenden äusseren Hauptkegelschnitt conjugirt sind.

1. *c*) Mittelst 1. *b*) ergiebt sich die Lösung von Aufgabe 1. *a*) für den Fall, dass x'' innerhalb des Hauptkegelschnitts $\mathfrak{K}''$ liegt. Es werden dann $\mathfrak{k}''$ und $\mathfrak{l}''$ (Fig. 3) und demzufolge auch k' und l', k und l imaginär. Man kann in diesem Falle durch x'' zwei beliebige Gerade ziehen, — deren Pole construiren (nach 1. *b*), und erhält dann in den Verbindungslinien der letzteren die verlangten Polaren von x''.

2. Mittelst 1. *a*) erledigt sich die Aufgabe, ein Tripel zugeordneter Punkte zu construiren, wie folgt (vgl. Fig. 3): Man wählt einen Punkt — z. B. x'' — willkürlich, bestimmt dessen zwei Polaren $k'l'$ und kl (nach 1. *a*), wählt auf einer der letzteren — z. B. $k'l'$ — den Punkt x' beliebig und construirt zu x' die Polare mn in Bezug auf $S'S$ (nach 1. *a*): so ist der Schnittpunkt von kl und mn der dritte zugeordnete Punkt x. (Man bemerke, dass —

nach 1. c — von drei zugeordneten Punkten höchstens einer innerhalb des zugehörigen inneren Hauptkegelschnitts liegen kann.)

3. Sind in zwei Ebenen — z. B. S' und S'' — zwei gerade Linien $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ gegeben, welche die zugehörigen äusseren Hauptkegelschnitte bezw. in den Hauptpunkten k' und l', m'' und n'' schneiden, so entspricht denselben in der dritten Ebene S ein Kegelschnitt, welcher durch die conjugirten Hauptpunkte k, l, m, n geht und ausserdem durch die zwei Pole g und h der Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ in Bezug auf die Ebene S, das heisst durch die zwei Punkte, in denen sich einerseits die zu k' und l' conjugirten, durch k und l gehenden Hauptlinien $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ —, andererseits die zu m'' und n'' conjugirten, durch m und n gehenden Hauptlinien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ schneiden.

Denn die Polaren der Punkte der Geraden $\mathfrak{g}'$ in Bezug auf $S'S''$ bilden ein Strahlenbüschel, das mit der Punktreihe $\mathfrak{g}'$ projectivisch ist und daher die Gerade $\mathfrak{h}''$ nach einer mit $\mathfrak{g}'$ projectivischen Punktreihe schneidet. Es bilden also die *zugeordneten* Punkte x' und x'' der zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ zwei projectivische Punktreihen. Hieraus folgt, dass auch die zwei Strahlenbüschel, welche in der Ebene S von den beiderseitigen Polaren der zugeordneten Punkte dieser zwei Punktreihen gebildet werden, zu einander projectivisch sind und also durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt erzeugen. — Da ferner z. B. dem Punkt k' auf $\mathfrak{g}'$ ein Punkt x''_k auf $\mathfrak{h}''$ als zugeordneter entspricht, der nicht Hauptpunkt ist, so muss diesen zwei Punkten (zufolge des am Schluss des § 3 formulirten Satzes 3) als dritter zugeordneter Punkt in S der conjugirte Hauptpunkt k entsprechen, das heisst: der Kegelschnitt muss durch k, und aus demselben Grunde auch durch l, m, n gehen. — Endlich muss er auch durch die Centren der zwei Strahlenbüschel g und h gehen; diese stellen aber die Pole der zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ vor und ergeben sich nach 1. b).

4. Es erhebt sich hier die Frage, unter welchen Umständen der zweien geraden Linien entsprechende Kegelschnitt zu einem Geradenpaar degenerirt. Es kann dies auf zweierlei Weise geschehen, nämlich:

a) dadurch, dass von den zwei projectivischen Strahlenbüscheln g und h ein Paar entsprechender Strahlen zusammenfällt. Nun stellen aber je zwei entsprechende Strahlen die Polaren zweier zugeordneten Punkte x' und x'' der zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ vor. Sollen dieselben zusammenfallen, so müssen x' und x'' conjugirte Hauptpunkte sein, und wird dann die gemeinschaftliche Polare vorgestellt durch die conjugirte Hauptlinie der Ebene

S. Es ergiebt sich also, dass der in Frage stehende besondere Fall dann eintritt, wenn die zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ durch zwei conjugirte Hauptpunkte gehen. Sind k' und k'' (vgl. Fig. 4) diese zwei conjugirten Hauptpunkte, und werden die Hauptkegelschnitte K' und K'' von den Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ ausserdem noch in den Punkten l' und m'' geschnitten, so wird das Geradenpaar, zu welchem der $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ zugeordnete Kegelschnitt degenerirt, vorgestellt durch die Verbindungslinie der zu l' und m'' conjugirten Hauptpunkte lm (gemäss Satz 3 des § 3, nach demselben Schluss wie oben in No. 3) plus der zu den Hauptpunkten k' und k'' conjugirten Hauptlinie $\mathfrak{k}$.

Das Zerfallen des Kegelschnitts in ein Geradenpaar kann aber noch auf andere Weise herbeigeführt werden, nämlich:

b) dadurch, dass von den zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ jede durch den Pol der andern geht, — $\mathfrak{g}'$ durch h' und $\mathfrak{h}''$ durch g''. Es ist alsdann der Punkt h' jedem Punkt der Geraden $\mathfrak{h}''$ — und ebenso der Punkt g'' jedem Punkt der Geraden $\mathfrak{g}'$ *zugeordnet*. Wird also in der Ebene S der Pol von $\mathfrak{g}'$ durch g — und die durch g gehende Polare von h' durch $\mathfrak{h}$ bezeichnet, ferner der Pol von $\mathfrak{h}''$ durch h, und die durch h gehende Polare von g'' durch $\mathfrak{g}$: so entspricht der Strahl $\mathfrak{h}$ jedem Strahl des Büschels h, und der Strahl $\mathfrak{g}$ jedem Strahl des Büschels g. Folglich ergiebt sich als Erzeugniss dieser zwei Strahlenbüschel das Geradenpaar $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$.

5. Die Verhältnisse, die bei noch specielleren Lagen der Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ eintreten, lassen sich nach dem über die zwei Hauptfälle Gesagten leicht überschauen. Mit Rücksicht auf Späteres sei in dieser Beziehung noch bemerkt: Gehen $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ zweimal durch conjugirte Hauptpunkte, nämlich durch k' und k'', m' und m'' (vgl. Fig. 4, in welcher jetzt vorübergehend $k'm'$ die Gerade $\mathfrak{g}'$ vorstellen möge), so fallen die Pole von $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ in Bezug auf die Ebene S (nach 1. *b*) in einen und denselben Punkt h, und die Polaren der zugeordneten Punktepaare von $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ bilden zwei in einander liegende projectivische Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen die den Hauptpunkten k', k'' und m', m'' conjugirten Hauptlinien $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}$ bilden. Diese sind bezw. den Punktepaaren k', k'' und m', m'' zugeordnet, während die den übrigen Punktepaaren von $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ zugeordneten Punkte sämmtlich in den Punkt h fallen.

6. Sind in zwei Ebenen — z. B. S' und S'' — zwei Curven M' und N'' gegeben, wo M' vom μ^{ten}, N'' vom ν^{ten} Grad sein mag, so entspricht denselben in der dritten Ebene S eine Curve L vom $2\mu\nu^{\text{ten}}$ Grade mit 2μ

ν-fachen und 2ν μ-fachen Punkten, die auf dem Hauptkegelschnitt K liegen und den Schnittpunkten der Curven M' und N'' mit den bezüglichen Hauptkegelschnitten K' und K'' conjugirt sind.

Denn die Curve M' schneidet den Hauptkegelschnitt K' in 2μ Punkten. Construirt man zu einem derselben k' die Polare in Bezug auf $S'S''$, so schneidet diese die Curve N'' in ν Punkten. Jeder dieser ν Punkte bildet zusammen mit k' ein Paar zugeordneter Punkte, und jedem dieser ν Paare entspricht (gemäss Satz 3 am Schlusse des § 3) als dritter zugeordneter Punkt der conjugirte Hauptpunkt k. Dieser stellt somit einen ν-fachen Punkt der Curve L vor. Gleiches gilt für sämmtliche 2μ Schnittpunkte k'. Folglich besitzt die Curve L in den 2μ Hauptpunkten der Ebene S, die den 2μ Schnittpunkten der Curve M' mit dem Hauptkegelschnitt K' conjugirt sind, 2μ ν-fache Punkte. Ganz ebenso ergiebt sich, dass sie in den 2ν Hauptpunkten, welche den 2ν Schnittpunkten der Curve N'' mit dem Hauptkegelschnitt K'' conjugirt sind, 2ν μ-fache Punkte besitzt. — Da die Curve L ausser den genannten Punkten keinen weiteren Punkt mit dem Hauptkegelschnitt K gemein haben kann (gemäss Satz 3 des § 3), und da diese 2μ ν-fachen und 2ν μ-fachen Punkte im Ganzen $4\mu\nu$ Schnittpunkte mit K repräsentiren, so ist L von der $2\mu\nu^{\text{ten}}$ Ordnung.

Gehen M' und N'' durch zwei conjugirte Hauptpunkte k' und k'', so degenerirt L zu einer Curve vom $(2\mu\nu-1)^{\text{ten}}$ Grade plus der conjugirten Hauptlinie $\mathfrak{k}$. Man erkennt unschwer, dass die Curve in dem zu k' conjugirten Hauptpunkt der Ebene S einen $(\nu-1)$-fachen —, in dem zu k'' conjugirten Hauptpunkt einen $(\mu-1)$-fachen Punkt besitzt und ausserdem $2\mu-1$ ν-fache und $2\nu-1$ μ-fache Punkte in den Hauptpunkten, welche den übrigen Schnittpunkten der Curven M' und N'' mit den Hauptkegelschnitten K' und K'' conjugirt sind. — U. s. f. — *).

---

*) Das dualistische Gegenstück zu der *dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft zwischen drei ebenen Punktsystemen* bildet die *dreibündig-eindeutige Verwandtschaft zwischen drei ebenen Geradensystemen.* Die Eigenschaften derselben ergeben sich durch einfache reciproke Umkehrung der vorangehenden Betrachtungen. Zwischen je zwei Geraden eines Tripels zugeordneter Geraden besteht die Beziehung, dass jede durch den Pol der andern in Bezug auf die zwischen den zugehörigen Ebenen bestehende Reciprocität gehen muss. Die *Hauptkegelschnitte* spielen die nämliche Rolle wie in der Punkt-Verwandtschaft. Je zweien conjugirten Hauptlinien ist in der dritten Ebene ein Hauptpunkt (als Doppelpol) conjugirt. Gleichwie in der Punkt-Verwandtschaft ein Tripel zugeordneter Punkte mittelst 1. *a* construirt wurde, so kommt bei der Geraden-Verwandtschaft zur Construction eines Tripels zugeordneter Geraden 1. *b* in Anwendung.

§ 5.

Unterfall der quadratischen Verwandtschaft.

Wie schon in § 1 erwähnt, ist die *quadratische Verwandtschaft* in der *dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft* als Specialfall einbegriffen. Beschränkt man nämlich in einer der drei Ebenen — z. B. S'' — die Punkte auf eine einzige gerade Linie $\mathfrak{h}''$, so werden dadurch die Punkte in den zwei andern Ebenen S' und S eindeutig auf einander bezogen im Sinne der quadratischen Verwandtschaft. Den einem Punkt x' der Ebene S' zugeordneten Punkt x der Ebene S erhält man, indem man zu x' und zu dem bestimmten ihm zugeordneten Punkt der Geraden $\mathfrak{h}''$ die beiderseitigen Polaren in der Ebene S construirt und deren Schnittpunkt x markirt.

Sind h' und h (vgl. Fig. 4) die Pole der Geraden $\mathfrak{h}''$ in Bezug auf die Ebenen S' und S, so bilden in diesen Ebenen die beiderseitigen Polaren der Punkte der Geraden $\mathfrak{h}''$ zwei Strahlenbüschel, deren Centren h' und h sind und welche beide zu der Punktreihe $\mathfrak{h}''$ —, folglich auch zu einander projectivisch sind. Je zwei zugeordnete Punkte x' und x liegen auf entsprechenden Strahlen dieser zwei projectivischen Büschel.

Je zwei entsprechende Strahlen müssen (nach § 4, No. 1. *a*) die Hauptkegelschnitte K' und K in conjugirten Hauptpunkten schneiden. — Unter den Strahlen sind besonders hervorzuheben die Hauptlinien $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}$, welche den zwei Schnittpunkten k'' und m'' der Geraden $\mathfrak{h}''$ mit dem Hauptkegelschnitt K'' conjugirt sind (vgl. § 4, No. 1. *b*). Sie gehen durch die zu k'' und m'' conjugirten Hauptpunkte k' und m', k und m (vgl. § 3, Satz 1). Es ist aber wohl zu beachten, dass k' und k, bezw. m' und m nicht unter sich conjugirt sind (vgl. § 4, Al. 2).

Den drei Punkten h', k' und m' einerseits, h, k und m andererseits kommt nun die wichtige Bedeutung zu, dass sie die ***Hauptpunkte*** — und ihre Verbindungslinien die ***Hauptlinien der quadratischen Verwandtschaft*** repräsentiren. Jedem dieser Punkte ist in der andern Ebene nicht ein bestimmter Punkt, sondern eine gerade Linie, nämlich eine *Hauptlinie* zugeordnet; und zwar verhält es sich mit dieser Zuordnung folgendermassen: Dem Punkte k' entspricht als zugeordnete die Linie hk, (denn hk ist Polare sowohl des Punktes k' als des diesem auf $\mathfrak{h}''$ zugeordneten Punktes k''). Ebenso entspricht dem Punkt m' die Linie hm. Endlich entspricht dem Punkt h' die Linie km, (denn nach § 4, No. 1. *a* ist km Polare von h' in Bezug auf $S'S$, während diesem Punkte andererseits jeder Punkt der Ge-

raden $\mathfrak{h}''$ und folglich jeder Strahl des Büschels h entspricht). Umgekehrt sind den Punkten k, m, h bezw. die Linien $h'k'$, $h'm'$, $k'm'$ zugeordnet. Es entsprechen sich somit die zweimal drei Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft in der Art paarweise, dass, wenn wir

h und h',
k und m',
m und k'

je als *correspondirende Hauptpunkte* bezeichnen, jedem Hauptpunkt der einen Ebene die Verbindungslinie der beiden nicht correspondirenden Hauptpunkte der andern Ebene zugeordnet ist.

Man achte im folgenden genau auf die consequente Auseinanderhaltung der zwei verschiedenen Begriffe: *correspondirende* Hauptpunkte der *quadratischen* Verwandtschaft und: *conjugirte* Hauptpunkte der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft. Auch behalte man im Auge, dass nicht jeder Hauptpunkt und jede Hauptlinie der *quadratischen* Verwandtschaft zugleich auch Hauptpunkt und Hauptlinie der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft ist.

Man bemerke ferner den wichtigen Umstand, dass von den Hauptpunkten der quadratischen Verwandtschaft h und h' jederzeit reell sind, während k, m und m', k' reell getrennt oder reell zusammenfallend oder imaginär sein können, je nachdem — die Reellität der Hauptkegelschnitte stets vorausgesetzt — die Gerade $\mathfrak{h}''$ den Hauptkegelschnitt K'' in zwei reellen getrennten oder reellen zusammenfallenden oder imaginären Punkten schneidet.

Es ergeben sich nun die Haupt-Eigenschaften der *quadratischen* Verwandtschaft als einfache Anwendungen der bezüglichen Eigenschaften der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft:

Dass einer Geraden $\mathfrak{g}'$ der Ebene S' im allgemeinen ein Kegelschnitt der Ebene S entspricht, welcher durch die drei Hauptpunkte der quadratischen Verwandtschaft h, k, m geht, folgt unmittelbar aus No. 3 des vorigen Paragraphen.

Desgleichen folgt aus No. 4, dass dieser Kegelschnitt zu einem Geradenpaar degenerirt, wenn $\mathfrak{g}'$ durch einen der drei Hauptpunkte h', k', m' geht.

Des genaueren ergiebt sich zunächst aus 4. *a*), dass einer durch k' gehenden Geraden $\mathfrak{g}'$ (vgl. Fig. 4) ein Geradenpaar entspricht, das aus einer durch m gehenden Geraden plus der Hauptlinie hk besteht. Denn

schneidet $\mathfrak{g}'$ den Hauptkegelschnitt K' ausser in k' noch in dem Punkte l', und ist l der diesem conjugirte Punkt des Hauptkegelschnitts K, so entspricht nach 4. *a*) des vorigen Paragraphen der Geraden $k'l'$ (in Gemeinschaft mit $k''m''$ der Ebene S'') in S die Gerade ml plus der den Punkten k' und k'' conjugirten Hauptlinie hk. — Dreht sich $k'l'$ um k', so dreht sich gleichzeitig die entsprechende Gerade ml um m. Da nun hierbei die jeweiligen Schnittpunkte l' und l stets conjugirte Hauptpunkte, das heisst entsprechende Punkte der projectivisch auf einander bezogenen Kegelschnitte K' und K sind, so folgt, dass auch die von $k'l'$ und ml gebildeten Strahlenbüschel projectivisch auf einander bezogen sind.

Ganz ebenso entspricht einer durch den Hauptpunkt m' gehenden Geraden der Ebene S' — in S eine durch k gehende Gerade plus der Hauptlinie hm, und sind die bezüglichen zwei Strahlenbüschel m' und k projectivisch.

Endlich entspricht (gemäss 4. *b* des vorigen Paragraphen) einer durch h' gehenden Geraden $\mathfrak{g}'$ ein Geradenpaar, bestehend 1) aus derjenigen durch h gehenden Geraden, welche vermöge der schon zu Anfang dieses Paragraphen (Al. 2) erwähnten projectivischen Beziehung der zwei Büschel h' und h dem Strahl $\mathfrak{g}'$ entspricht, 2) der Polaren von h' in Bezug auf $S'S$, welche repräsentirt wird durch km.

Somit ist der Satz bewiesen:

Jeder durch einen Hauptpunkt gehenden geraden Linie entspricht in der andern Ebene ein Geradenpaar, bestehend aus einer durch den correspondirenden Hauptpunkt gehenden Geraden plus der Verbindungslinie der zwei andern Hauptpunkte. Die in dieser Weise sich entsprechenden, durch zwei correspondirende Hauptpunkte gehenden Geraden bilden je zwei projectivische Strahlenbüschel.

Einer in S' gegebenen Curve M' vom μ^{ten} Grade entspricht (gemäss No. 6 des vorigen Paragraphen) in S eine Curve L vom $2\mu^{\text{ten}}$ Grade, welche durch die drei Hauptpunkte geht und in jedem einen μ-fachen Punkt besitzt. (Bezüglich der Hauptpunkte k und m folgt letzteres aus No. 6, bezüglich des Hauptpunktes h aus No. 5, insofern den sämmtlichen μ Schnittpunkten der Curve M' mit der Linie $m'k'$ der Punkt h zugeordnet ist). — Geht M' durch einen Hauptpunkt, so degenerirt L zu einer Curve vom $(2\mu-1)^{\text{ten}}$ Grade plus der Verbindungslinie der zwei nicht correspondirenden Hauptpunkte; die Curve besitzt im correspondirenden Hauptpunkt einen μ-fachen —, in den zwei andern Hauptpunkten je einen $(\mu-1)$-fachen Punkt.

§ 6.

Uebergang zur trilinearen Verwandtschaft.

Wir wenden uns nunmehr zur Erörterung der Frage, unter welchen Bedingungen die allgemeine *dreibündig-eindeutige* Verwandtschaft in die *dreibündig-trilineare* Verwandtschaft übergeht.

Beschränkt man die Punkte in einer der drei Ebenen auf eine einzige gerade Linie in der Weise, wie es im vorigen Paragraphen geschehen ist, so muss bei dem Specialfall der *trilinearen* Verwandtschaft als Beziehung zwischen den zwei andern Ebenen statt der *quadratischen* — der Specialfall der *collinearen* Verwandtschaft zu Tage treten. Umgekehrt können wir sagen: Werden bei drei *dreibündig-eindeutig* auf einander bezogenen ebenen Systemen die Punkte der einen Ebene S'' auf eine einzige gerade Linie $\mathfrak{h}''$ beschränkt und es ergiebt sich, dass die dadurch zwischen den zwei andern Ebenen S und S' bedingte eindeutige Verwandtschaft diejenige der *Collineation* ist, und zwar gleichgültig, welche Lage auch immer die Gerade $\mathfrak{h}''$ in der Ebene S'' haben mag: so ist die zwischen den drei ebenen Systemen bestehende Beziehung diejenige der *dreibündig-trilinearen* Verwandtschaft.

Nun kann die durch eine bestimmte Annahme der Geraden $\mathfrak{h}''$ bedingte Verwandtschaft der zwei Systeme S und S' nur so zur *collinearen* werden, wenn die projectivischen Beziehungen zwischen den drei Paaren von Strahlenbüscheln h und h', k und m', m und k' der Art sind, dass bei irgend zwei Paaren die gemeinschaftlichen Strahlen sich gegenseitig entsprechen (vgl. § 1).

Nehmen wir also (vgl. Fig. 4) z. B. m und k' einerseits, k und m' andererseits als correspondirende Hauptpunkte, so müsste einerseits dem Strahl mk des Büschels m der Strahl $k'm'$ des Büschels k' —, andererseits dem Strahl km des Büschels k der Strahl $m'k'$ des Büschels m' entsprechen. Nun entspricht aber (nach § 5) dem Strahl mk des Büschels m derjenige Strahl des Büschels k', der durch den mit k conjugirten Hauptpunkt geht, das ist: die zu k conjugirte Hauptlinie $k'h'$. Es müssten folglich $k'm'$ und $k'h'$ zusammenfallen. In gleicher Weise müsste andererseits $m'k'$ mit $m'h'$ zusammenfallen. Kurz, es müssten die zwei Hauptlinien $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{m}'$ sich in eine Gerade vereinigen. Diese Bedingung, (welche sich auch bei den zwei andern Paaren correspondirender Hauptpunkte ergiebt,) müsste zutreffen, welche Lage auch immer die Gerade $\mathfrak{h}''$ in der Ebene S'' haben mag.

Denkt man sich also z. B. den Punkt k'' festgehalten und die Gerade $\mathfrak{h}''$ um denselben gedreht, so würde die Hauptlinie $\mathfrak{k}'$ fest bleiben, und es müssten die sämmtlichen verschiedenen Lagen des Hauptpunktes m' ebenso wie die sämmtlichen verschiedenen Lagen der Hauptlinie $\mathfrak{m}'$ in die eine Gerade $\mathfrak{k}'$ fallen. In gleicher Weise müssten auch in den zwei andern Ebenen die Hauptlinien alle in eine Gerade zusammenfallen, welche zugleich sämmtliche Hauptpunkte enthielte. Wir gelangen somit zu folgendem Schluss:

Soll die *dreibündig-eindeutige* Verwandtschaft zur ***trilinearen*** Verwandtschaft werden, so müssten an Stelle der drei Paare von Hauptkegelschnitten drei gerade Linien $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$ — ***Hauptaxen*** — treten, welchen die Eigenschaft zukäme, dass zu zwei auf zwei Hauptaxen angenommenen zugeordneten Punkten die beiderseitigen Polaren in Bezug auf die dritte Ebene jedesmal in die dieser Ebene zugehörige dritte Hauptaxe zusammenfallen.

Die zwischen irgend zweien der drei Ebenen — z. B. S und S' — bestehende Reciprocitätsbeziehung müsste demgemäss eine solche sein, dass den sämmtlichen Punkten einer gewissen geraden Linie $\mathfrak{k}$ der einen Ebene eine und dieselbe Linie $\mathfrak{k}'$ der andern Ebene als Polare entspräche, und umgekehrt.

Die allgemeine Reciprocitätsverwandtschaft vermag diese Forderung nicht zu befriedigen. Es kann somit der Specialfall der ***trilinearen*** Verwandtschaft nicht etwa dadurch herbeigeführt werden, dass zwischen den drei allgemeinen Reciprocitäten SS', $S'S''$, $S''S$ gewisse Beziehungen festgesetzt werden. Dagegen bildet die Eigenthümlichkeit, dass den Punkten einer geraden Punktreihe nicht ein Strahlenbüschel, sondern eine einzige Gerade entspricht, eine charakteristische Eigenschaft der ***parabolischen*** Reciprocität und nur dieser. Als solche bezeichnen wir nämlich diejenige reciproke Beziehung, welche bei Herstellung der polaren Lage auf ein ***parabolisches Polarsystem*** *) führt. Bei derselben gehen in jeder Ebene die Polaren sämmtlicher Punkte der andern Ebene durch einen und denselben Punkt, den wir als den ***Kernpunkt*** der betreffenden Ebene bezeichnen, und zwar constituiren die beiderseitigen Polaren in den Kernpunkten zwei projectivische Strahlenbüschel (*Kernstrahlenbüschel*), — in der Art, dass irgend einem Punkt der einen Ebene derjenige *Kernstrahl* der andern Ebene als

*) Vergl. *H. Schröter*, „Theorie der Kegelschnitte," § 57.

Polare entspricht, welcher dem nach dem Punkte führenden ***Kernstrahl*** der ersten Ebene vermöge der projectivischen Beziehung zugeordnet ist.

§ 7.

Die parabolische dreibündig-eindeutige Verwandtschaft.

Wir lassen zunächst noch nicht die volle Beschränkung eintreten, durch welche vermöge der Ergebnisse des vorigen Paragraphen die allgemeine ***dreibündig-eindeutige*** Verwandtschaft zur ***trilinearen*** Verwandtschaft wird, sondern begnügen uns vorläufig mit der blossen Bedingung, dass die drei Reciprocitätsbeziehungen SS', $S'S''$, $S''S$, durch welche die dreibündig-eindeutige Verwandtschaft bestimmt wird, parabolische seien. Wir erhalten dadurch zunächst einen Specialfall der allgemeinen Verwandtschaft, den wir als ***parabolische dreibündig-eindeutige Verwandtschaft*** bezeichnen wollen.

Je zwei Kernpunkte q und p', q' und p'', q'' und p, und die in ihnen liegenden projectivischen Strahlenbüschel, durch welche gemäss der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen die Reciprocitätsbeziehung zwischen je zwei Ebenen bestimmt ist, bezeichnen wir als ***gegnerische Kernpunkte*** und ***gegnerische Kernstrahlenbüschel.*** Die Bedingung, dass von je zwei Punkten eines Tripels zugeordneter Punkte jeder auf der Polaren des andern in Bezug auf das Reciprocitätsverhältniss der betreffenden Ebenen liegen muss, specialisirt sich also jetzt dahin, dass je zwei zugeordnete Punkte auf entsprechenden Strahlen der betreffenden zwei gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen müssen. Kurz, wir haben denselben Constructionsmechanismus wie bei der ***projectiv-trilinearen*** Verwandtschaft, nur mit dem Unterschied, dass die drei Verbindungslinien je zweier in derselben Ebene liegenden Kernpunkte nicht als entsprechende Strahlen der gegnerischen Kernstrahlenbüschel figuriren.

Es ist leicht ersichtlich, dass die drei Systeme jederzeit in ***orientirte Lage*** in einer Ebene gebracht werden können, das heisst in eine solche Lage, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch sind. Denn es kann dies genau auf dieselbe Weise bewerkstelligt werden, wie es im II. Artikel, § 6*) für drei ***projectiv-trilineare*** Systeme angegeben wurde. — Fig. 5 zeigt die drei Systeme in solcher Lage**).

*) S. dieses Journal, Bd. 97, S. 274.

**) Fig. 5 mag für sämmtliche Einzelbetrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen benutzt werden. Die betreffenden, nicht ausgeführten Specialconstructionen können für jede Einzelbetrachtung leicht eingefügt oder hinzugedacht werden.

Die drei Verbindungslinien je zweier in derselben Ebene liegenden Kernpunkte wollen wir als ***Hauptaxen*** und die ihnen in den bezüglichen gegnerischen Strahlenbüscheln entsprechenden Strahlen als ***Hauptstrahlen*** bezeichnen. Es gehören dann zu jeder ***Hauptaxe*** zwei ***Hauptstrahlen***, die wir zu derselben und zu einander ***conjugirt*** nennen. Bezeichnet man die Schnittpunkte je zweier in derselben Ebene liegenden Hauptstrahlen bezw. durch r, r', r'': so sind

der Hauptaxe $p\,q$ die Hauptstrahlen $p'r'$ und $q''r''$,
- - $p'q'$ - - - $p''r''$ - $q\,r$,
- - $p''q''$ - - - $p\,r$ - $q'r'$

conjugirt. In Fig. 5 ist zur Erleichterung der Uebersicht jede Hauptaxe mit ihren zwei conjugirten Hauptstrahlen durch eine besondere Liniensorte (ausgezogen, gestrichelt, punktirt) charakterisirt.

Auf je zwei conjugirten Hauptstrahlen — z. B. $p'r'$ und $q''r''$ — bilden die zugeordneten Punkte, (welche durch die Schnitte entsprechender Strahlen der Büschel q' und p'' bestimmt werden,) zwei projectivische Punktreihen; je zwei zugeordnete Punkte derselben wollen wir ***conjugirte Hauptpunkte*** nennen *).

Es gelten dann folgende Sätze:

1. Zu je zwei ***conjugirten Hauptpunkten*** wird der dritte zugeordnete Punkt unbestimmt, insoferne jeder Punkt der ***conjugirten Hauptaxe*** als solcher fungiren kann.

2. Umgekehrt gilt: Fällt von einem Tripel zugeordneter Punkte einer in einen Hauptpunkt, ein zweiter in irgend einen Punkt der conjugirten Hauptaxe, so muss der dritte in den dem ersten conjugirten Hauptpunkt fallen.

3. Eine Ausnahme findet indessen statt, wenn der auf der Hauptaxe liegende Punkt speciell in den mit der dritten Ebene in Beziehung stehenden ***Kernpunkt*** fällt. Alsdann tritt bezüglich des dritten Punktes eine gewisse Unbestimmtheit ein. Fällt z. B. Punkt x' in irgend einen Punkt k' des Hauptstrahls $q'r'$, und Punkt x'' in den Kernpunkt q'', so kann als dritter

---

*) Man beachte, dass nur die Punkte der ***Hauptstrahlen***, nicht diejenigen der ***Hauptaxen*** als Hauptpunkte bezeichnet werden. Die ***Hauptstrahlen*** sind an Stelle der äusseren Hauptkegelschnitte —, die ***Hauptaxen*** an Stelle der inneren Kegelschnitte getreten.

zugeordneter Punkt x jeder Punkt des dem Strahl $p'k'$ entsprechenden Strahls des Büschels q fungiren.

4. Umgekehrt gilt: Zu zwei zugeordneten Punkten, von welchen der eine in einen Hauptpunkt fällt, der andere aber weder auf der conjugirten Hauptaxe noch auf dem conjugirten Hauptstrahl liegt, kann als dritter zugeordneter Punkt nur ein ***Kernpunkt*** fungiren, und zwar derjenige, welcher zu der Ebene des zweiten Punktes in Beziehung steht.

5. Zweien in zwei Ebenen, z. B. S' und S'', gegebenen geraden Linien $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ (vgl. Fig. 5) entspricht in der dritten Ebene S ein Kegelschnitt. Schneiden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ die in ihren Ebenen liegenden Hauptstrahlen bezw. in den Punkten k' und l', m'' und n'', wobei k' und m'' die Schnitte mit denjenigen zwei Hauptstrahlen ($q'r'$ und $p''r''$) sein mögen, deren conjugirte Hauptstrahlen (pr und qr) in der Ebene S liegen, so geht der Kegelschnitt (nach No. 2) durch die mit k' und m'' conjugirten Hauptpunkte k und m, sowie durch die zwei Kernpunkte p und q, welch letztere (nach No. 4) als bezw. den Punkten l' und n'' zugeordnet anzusehen sind.

Dazu sei noch bemerkt: der dem Strahl $p'l'$ entsprechende Strahl des Büschels q fällt in die Verbindungslinie qp. Ist daher x_l'' derjenige Punkt der Geraden $\mathfrak{h}''$, welcher dem Punkt l' zugeordnet ist, so ist (nach bekanntem Satze) der Strahl des Büschels p, welcher dem Strahl $q''x_l''$ entspricht, Tangente an den Kegelschnitt im Punkt p. Desgleichen berührt der Strahl des Büschels q, welcher die Polare des dem Punkt n'' zugeordneten Punktes der Geraden $\mathfrak{g}'$ bildet, den Kegelschnitt in q.

6. Gehen die zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ durch zwei conjugirte Hauptpunkte (der conjugirten Hauptstrahlen $p'r'$ und $q''r''$), so degenerirt der Kegelschnitt zu einem Geradenpaar. Schneiden sie die zwei andern Hauptstrahlen $q'r'$ und $p''r''$ in den Punkten k' und m'', so besteht das Geradenpaar aus der Verbindungslinie der mit diesen conjugirten Punkte k und m plus der Hauptaxe pq.

Das Zerfallen des Kegelschnitts in ein Geradenpaar findet ferner statt, wenn eine der zwei Geraden $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}''$ durch einen Kernpunkt geht. Das Geradenpaar wird dann gebildet aus zwei Strahlen der Kernbüschel p und q. Geht z. B. $\mathfrak{h}''$ durch p'', so sind einerseits sämmtliche Punkte x'' von $\mathfrak{h}''$ einem bestimmten Punkte g' von $\mathfrak{g}'$ zugeordnet, und liegen die dritten zugeordneten Punkte x auf dem Strahl des Büschels q, welcher dem Strahl $p'g'$ des Büschels p' entspricht. Andererseits sind sämmtliche

Punkte x' von $\mathfrak{g}'$ dem Punkt p'' der Geraden $\mathfrak{h}''$ zugeordnet, und liegen die dritten zugeordneten Punkte x auf dem Hauptstrahl pr. — Geht ferner $\mathfrak{h}''$ durch q'', so entspricht jedem Punkt von $\mathfrak{h}''$ ein bestimmter zugeordneter von $\mathfrak{g}'$, und es fallen die bezüglichen dritten zugeordneten Punkte in den Strahl des Büschels p, welcher dem Strahl $\mathfrak{h}''$ des Büschels q'' entspricht. Ausserdem bildet der Punkt q'' auf $\mathfrak{h}''$ und der Schnittpunkt k' der Geraden $\mathfrak{g}'$ mit dem Hauptstrahl $q'r'$ ein zugeordnetes Punktepaar, zu welchem (nach No. 3) als dritter zugeordneter Punkt jeder Punkt des dem Strahl $p'k'$ entsprechenden Strahls des Büschels q treten kann.

7. Sind in zwei Ebenen, z. B. S' und S'', zwei Curven M' und N'' gegeben, wo M' vom μ^{ten}, N'' vom ν^{ten} Grade sein mag, so entspricht denselben in der dritten Ebene S eine Curve L vom $2\mu\nu^{\text{ten}}$ Grade mit μ ν-fachen und ν μ-fachen nebst 2 $\mu\nu$-fachen Punkten. Die μ ν-fachen Punkte liegen auf dem Hauptstrahl pr und sind den μ Schnittpunkten der Curve M' mit dem Hauptstrahl $q'r'$ conjugirt; die ν μ-fachen Punkte liegen auf dem Hauptstrahl qr und sind den ν Schnittpunkten der Curve N'' mit dem Hauptstrahl $p''r''$ conjugirt; die 2 $\mu\nu$-fachen Punkte fallen in die Kernpunkte p und q.

Denn ist k' irgend einer der μ Schnittpunkte des Hauptstrahls $q'r'$ mit der Curve M', so bildet k' zusammen mit jedem der ν Schnittpunkte, welche die Hauptaxe $p''q''$ mit der Curve N'' gemein hat, ein Paar zugeordneter Punkte, und jedem dieser ν Paare entspricht (gemäss No. 2) als dritter zugeordneter Punkt in der Ebene S der conjugirte Hauptpunkt k. Dieser stellt somit einen ν-fachen Punkt der Curve L vor. Gleiches gilt für sämmtliche μ Schnittpunkte k'. — Ebenso ergiebt sich, dass die ν Punkte des Hauptstrahls qr, welche den ν Schnittpunkten der Curve N'' mit dem Hauptstrahl $p''r''$ conjugirt sind, μ-fache Punkte für die Curve L sind.

Ist ferner l' irgend einer der μ Schnittpunkte des Hauptstrahls $p'r'$ mit der Curve M', so schneidet der dem Strahl $q'l'$ entsprechende Strahl des Büschels p'' die Curve N'' in ν Punkten, deren jeder zusammen mit l' ein Paar zugeordneter Punkte bildet. Jedem dieser ν Paare entspricht (gemäss No. 4) als dritter zugeordneter Punkt der Kernpunkt p. Dieser würde also zunächst einen ν-fachen Punkt vorstellen. Da aber das Gleiche für sämmtliche μ Schnittpunkte l' gilt, so fallen in den Kernpunkt p μ solche ν-fachen Punkte, das heisst: derselbe repräsentirt einen $\mu\nu$-fachen Punkt. — Ist x_i'' einer der ν Punkte der Curve N'', welche einem der

μ Punkte l' der Curve M' zugeordnet sind, so ist der Strahl des Büschels p, welcher dem Strahl $q''x_i''$ entspricht, Tangente an den betreffenden Curvenzweig von L im Punkt p. Denn nach der Schlussbemerkung von No. 5 berührt er den Kegelschnitt, welcher den zwei Tangenten von M' und N'' in l' und x_i'' entspricht; da aber M' und N'' die Curvenelemente in l' und x_i'' mit den Tangenten gemein haben, so muss auch L das zugeordnete Curvenelement in p mit dem Kegelschnitt gemein haben. Analoges gilt für sämmtliche durch p gehende $\mu\nu$ Zweige der Curve L. — Stellt man dieselbe Betrachtung mit den ν Schnittpunkten an, welche der Hauptstrahl $q''r''$ mit der Curve N'' gemein hat, so ergiebt sich ebenso, dass in den Kernpunkt q ein $\mu\nu$-facher Punkt der Curve L fällt und dass die Tangenten an die $\mu\nu$ Curvenzweige in q vorgestellt werden durch die Polaren der $\mu\nu$ Punkte der Curve M', welche den ν Schnittpunkten der Curve N'' mit dem Hauptstrahl $q''r''$ zugeordnet sind.

Da die Curve L ausser den genannten Punkten keinen weiteren Punkt mit einem der zwei Hauptstrahlen pr und qr gemein haben kann (gemäss No. 2 und 3), und da die z. B. auf pr liegenden μ ν-fachen Punkte und der $\mu\nu$-fache Punkt $2\mu\nu$ Schnittpunkte mit L repräsentiren, so ist L von der $2\mu\nu^{\text{ten}}$ Ordnung.

8. Beschränkt man in einer der drei Ebenen — z. B. S'' — die Punkte auf eine einzige gerade Linie $\mathfrak{h}''$, so werden dadurch die Punkte in den zwei andern Ebenen S' und S einander eindeutig zugeordnet im Sinne der *quadratischen* Verwandtschaft. Schneidet $\mathfrak{h}''$ die zwei Hauptstrahlen $p''r''$ und $q''r''$ in den Punkten m'' und n'' (vgl. Fig. 5) und sind m (auf qr) und n' (auf $p'r'$) die ihnen conjugirten Hauptpunkte, so bilden p, q, m und mit diesen einzeln correspondirend — q', p', n' die *Hauptpunkte* der quadratischen Verwandtschaft. (Dass einer Geraden durch n' eine Gerade durch m entspricht, folgt aus No. 6; die entsprechenden Geradenpaare bilden zwei projectivische Büschel, da sie die zwei Hauptstrahlen pr und $q'r'$ in conjugirten Punkten schneiden.)

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass die quadratische Verwandtschaft, welche sich als Unterfall der ***parabolischen dreibündig-eindeutigen*** Verwandtschaft ergiebt, stets eine solche ist, deren drei Hauptpunkte-Paare sämmtlich reell sind.

§ 8.
Die dreibündig-trilineare Verwandtschaft.

Soll die *parabolische dreibündig-eindeutige* Verwandtschaft zur *dreibündig-trilinearen* Verwandtschaft werden, so muss die durch Beschränkung der Punkte einer Ebene auf eine gerade Linie bedingte Beziehung der zwei andern Ebenen zur *collinearen* Verwandtschaft werden. Dies ist nur dadurch möglich, dass die projectivischen Beziehungen zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln so beschaffen sind, dass die Verbindungslinien je zweier in derselben Ebene liegenden Kernpunkte durchweg entsprechende Strahlen bilden. Es fallen alsdann in jeder Ebene die *Hauptstrahlen* mit der *Hauptaxe* zusammen, und wir haben eben die Verhältnisse, die wir schon in § 6 als die nothwendige Bedingung für die allgemeine *dreibündig-trilineare* Verwandtschaft erkannt haben, nämlich: die Existenz dreier *Hauptaxen* mit der Eigenschaft, dass zu zwei auf zwei Hauptaxen angenommenen zugeordneten Punkten die beiderseitigen Polaren in Bezug auf die dritte Ebene jedesmal in die dritte Hauptaxe zusammenfallen.

Dieser Verwandtschaftsmodus ist aber nun formell genau identisch mit demjenigen, den wir als zwischen drei verschiedenen Projectionen eines räumlichen Punktsystems bestehend erkannt haben. Somit ist der Nachweis erbracht, dass drei *dreibündig-trilineare* ebene Punktsysteme stets als die Projectionen eines und desselben, im allgemeinen räumlichen Punktsystems angesehen werden können, oder: dass die zwischen drei Projectionen eines räumlichen Punktsystems obwaltende Beziehung den allgemeinsten Fall der *dreibündig-trilinearen* Punkt-Verwandtschaft repräsentirt.

Es ist indessen auf den Unterschied hinzuweisen, welcher zwischen beiden Definitionen hinsichtlich der Bestimmtheit der Zuordnungsverhältnisse der auf den Hauptaxen liegenden Punkte besteht. Nach der Anschauungsweise der allgemeinen *dreibündig-trilinearen* Verwandtschaft kann zu zwei auf zwei Hauptaxen liegenden Punkten als dritter zugeordneter jeder beliebige Punkt der dritten Hauptaxe fungiren, während bei der Auffassung der drei Systeme als *Projectionen* eines und desselben räumlichen Systems jener dritte zugeordnete Punkt vollständig und eindeutig bestimmt ist. (So reducirt sich auch z. B. die Curve L vom $2\mu\nu^{\text{ten}}$ Grad, welche in der *dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft zweien Curven M' vom μ^{ten} und N'' vom

ν^{ten} Grad entspricht, in der ***dreibündig-trilinearen*** Verwandtschaft auf eine Curve vom $\mu\nu^{\text{ten}}$ Grad plus der $\mu\nu$-fach zu zählenden Hauptaxe pq, während bei der ***projectiven*** Auffassung die letztere nicht mitzurechnen ist.)

§ 9.

Beziehungen zu dem *Mac Laurin-Braikenridge*schen Theorem.

Befinden sich drei ***parabolische dreibündig-eindeutige*** oder drei ***dreibündig-trilineare*** ebene Systeme in orientirter Lage in einer Ebene, so können wir den bezüglichen Constructionsmechanismus zur Bestimmung von Tripeln zugeordneter Punkte (vgl. Fig. 5 und 1) folgendermassen formuliren:

Bewegt sich ein veränderliches Sechseck so, dass drei nicht auf einander folgende Ecken auf drei festen Leitgeraden laufen, während die sechs Seiten sich um sechs feste Punkte drehen, so werden von den noch freien Ecken drei ebene Punktsysteme beschrieben, welche in ***parabolischer dreibündig-eindeutiger*** Verwandtschaft stehen. Liegen die sechs festen Punkte so, dass die Verbindungslinien je zweier solcher, um welche sich die einer freien Ecke anliegenden Seiten drehen, sich auf den Leitgeraden schneiden, (was namentlich der Fall ist, wenn alle sechs Punkte in gerader Linie liegen): so reducirt sich die Verwandtschaft auf den Specialfall der ***projectiv-trilinearen*** Verwandtschaft.

Wir haben damit Fühlung gewonnen mit dem *Mac Laurin-Braikenridge*schen Theorem *).

Es ist leicht, den Satz für ein Vieleck von beliebig vielen Seiten zu verallgemeinern.

Es ist zunächst einleuchtend, dass sich der allgemeine Verwandtschaftscharakter der von den drei freien Ecken beschriebenen Systeme nicht ändert, wenn man aus dem Sechseck ein Siebeneck macht, indem man irgendwo eine weitere Leitgerade für die siebente Ecke und einen Drehpunkt für die hinzugekommene siebente Seite einfügt. Denn es bewegen sich dann zwei auf einander folgende Ecken auf Leitgeraden. Also beschreiben die zwischenliegende —, die dieser vorangehende — und die

---

*) Vgl. *Braikenridge:* „Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum." London 1733. — *Philosophical Transactions,* Vol. XXXIX, 1735, p. 25: *Braikenridge,* „A general method of describing curves etc." — Ebendaselbst p. 143: „A letter from Mr. *Colin Mac Laurin,* concerning the description of curve lines". — Vgl. auch: *Poncelet,* „Traité des propriétés projectives des figures," § 537 u. flgde.

nachfolgende Vielecksseite Strahlenbüschel, von denen das erste zu dem zweiten, das zweite zu dem dritten perspectivisch —, also das erste zu dem dritten projectivisch ist. Man kann also das erste und dritte Büschel als ein Paar *gegnerischer Kernstrahlenbüschel* betrachten, die indessen im allgemeinen jetzt nicht mehr perspectivisch liegen. — Man kann auf diese Weise durch Einfügen neuer Leitgeraden und Drehpunkte die Seitenzahl des beweglichen Vielecks beliebig vermehren.

Es bleibt dabei die Voraussetzung, dass von den drei freien Ecken keine zwei unmittelbar auf einander folgen, zunächst noch bestehen. Indessen kann auch diese Beschränkung fallen gelassen werden. Denn reducirt man das ursprüngliche Sechseck auf ein Fünfeck, indem man eine Leitgerade nebst einem benachbarten Drehpunkt ausschaltet, so dass nun zwei freie Ecken unmittelbar auf einander folgen: so beschreibt die zwischenliegende Fünfecksseite ein Strahlenbüschel, das als Vereinigung zweier zusammengefallenen congruenten Strahlenbüschel betrachtet werden kann. Es bleibt also der allgemeine Bestimmungsmodus der Verwandtschaft durch drei Paare projectivischer Strahlenbüschel bestehen; nur ist eines dieser Paare speciell congruent. — In gleicher Weise kann man auch die zwei andern Leitgeraden ausschalten, wodurch man zu dem Satze gelangt:

Die drei ebenen Systeme, welche von den Ecken eines veränderlichen Dreiecks beschrieben werden, dessen Seiten sich um drei feste Punkte drehen, stehen in einer Beziehung, welche einen besonderen Fall der *parabolischen dreibündig-eindeutigen* Verwandtschaft — bezw., falls die drei Drehpunkte in gerader Linie liegen, der *projectiv-trilinearen* Verwandtschaft — repräsentiren.

Durch beliebig häufiges Ausschalten und Einschalten von Leitgeraden und Drehpunkten gelangt man schliesslich zu dem allgemeinen Satz:

Bewegt sich ein veränderliches Vieleck von beliebig vielen Seiten so, dass seine Ecken mit Ausnahme von dreien auf eben so vielen festen Leitgeraden laufen, während jede seiner Seiten sich um einen festen Punkt dreht: so stehen die von den drei noch freien Ecken beschriebenen ebenen Systeme in parabolischer dreibündig-eindeutiger Verwandtschaft, welche sich auf die projectiv-trilineare Verwandtschaft reducirt, wenn die Leitgeraden und Drehpunkte so liegen, dass es möglich ist, eine Form und Lage des veränderlichen Vielecks zu zeichnen, für welche die Winkel an den drei

freien Ecken *flache* *sind, — eine Bedingung, die namentlich dann zutrifft, wenn die Drehpunkte alle in gerader Linie liegen. — Verringert man die Anzahl der freien Ecken auf 2, so reducirt sich die dreibündig-eindeutige —, bezw. trilineare Verwandtschaft auf die quadratische — (mit drei reellen Hauptpunktepaaren), bezw. collineare Verwandtschaft.*

Um den Satz auf den Fall von mehr als drei freien Ecken auszudehnen, könnte man den Begriff der dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft zu demjenigen der *n-bündig-eindeutigen Verwandtschaft zwischen n ebenen Punktsystemen* erweitern und von dieser dann den Specialfall der *parabolischen n*-bündig-eindeutigen Verwandtschaft bilden. —

Es geschah oben des besonderen Falles von drei projectiv-trilinearen Systemen Erwähnung, die erzeugt werden durch die Ecken eines veränderlichen Dreiecks, dessen Seiten sich um drei in gerader Linie liegende feste Punkte drehen. Hinsichtlich dieses Specialfalles mögen noch folgende Bemerkungen Platz finden:

Projicirt man ein räumliches System von zwei verschiedenen Projectionscentren aus auf zwei parallele Ebenen, so sind die bezüglichen Kernstrahlenbüschel congruent in entsprechend-paralleler Lage; denn der *Grundschnitt* fällt in's Unendliche. Fallen die zwei parallelen Projectionsebenen zusammen, das heisst: projicirt man das räumliche System auf eine und dieselbe Ebene von zwei verschiedenen Centren aus, so gelangen die zwei congruenten Kernstrahlenbüschel zur Deckung. Es existirt dann nur ein Kernpunkt, welcher entsteht als Schnittpunkt der Verbindungslinie der zwei Centren mit der Projectionsebene. Dies auf drei Projectionen von drei verschiedenen Centren aus angewendet — giebt den Satz:

Die drei ebenen Systeme, die erzeugt werden durch die Ecken eines veränderlichen Dreiecks, dessen Seiten sich um drei in gerader Linie liegende feste Punkte drehen, können stets — und zwar auf unendlich verschiedene Weise — in formeller und situeller Hinsicht als die Projectionen eines räumlichen Systems auf die nämliche Ebene von drei verschiedenen Projectionscentren aus angesehen werden.

Sind O_0, O_1, O_2 (vgl. Fig. 6) die drei Projectionscentren, und schneiden die drei Verbindungslinien O_0O_1, O_1O_2, O_2O_0 die Projectionsebene in den drei Punkten p_{01}, p_{12}, p_{20}, welche in gerader Linie liegen, nämlich in der Schnittlinie der Ebene $O_0O_1O_2$ mit der Projectionsebene: so stellen p_{01}, p_{12}, p_{20} die drei Kernpunkte vor. Sind x^0, x', x'' die drei Projectionen

eines Punktes X, so müssen je zwei derselben auf einem und demselben Kernstrahl liegen, nämlich: x^0x' muss durch p_{01} gehen, $x'x''$ durch p_{12}, $x''x^0$ durch p_{20}. Man erkennt, dass die Sache auf den ***Satz des Desargues*** hinausläuft: die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken der zwei Dreiecke $O_0O_1O_2$ und $x^0x'x''$ schneiden sich in einem und demselben Punkt X, folglich müssen sich je zwei entsprechende Seiten der zwei Dreiecke in drei, in gerader Linie liegenden Punkten p_{01}, p_{12}, p_{20} schneiden, und umgekehrt.

Der in Rede stehende Specialfall der ***projectiv-trilinearen*** Verwandtschaft bietet auch insofern besonderes Interesse, als er das dualistische Gegenstück zu dem besonderen Fall der ***sectiv-trilinearen*** Verwandtschaft bildet, welcher durch die Beziehung zwischen den auf drei Ebenen markirten Spuren eines räumlichen Ebenensystems repräsentirt wird. (Vgl. I. Artikel, § 1. Dieses Journal, Bd. 95, S. 4.)

Berlin, Juni 1884.

(Fortsetzung folgt.)

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Wien.)

1.

Es sei

$$(1.)\qquad P(y)=\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y=0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung der m^{ten} Ordnung und y_1, y_2, ... y_m ein Fundamentalsystem von Integralen derselben: Nach den Untersuchungen des Herrn *Frobenius* *) lässt sich ihr erster Theil in der Form darstellen

$$(2.)\qquad P(y)=\frac{D_m}{D_{m-1}}\frac{d}{dx}\frac{D_{m-1}^2}{D_m D_{m-2}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\frac{D_0}{D_1}y,$$

wo allgemein $D_i=D(y_1,\ y_2,\ \dots\ y_i)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_i \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_i}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}} & \frac{d^{i-1}y_2}{dx^{i-1}} & \cdots & \frac{d^{i-1}y_i}{dx^{i-1}} \end{vmatrix}$$

bezeichnet, für welche, wenn f eine beliebige Grösse bedeutet, die Beziehung stattfindet

$$(3.)\qquad D(fy_1,\ fy_2,\ \dots\ fy_i)\ =\ f^i.D_i.$$

Wird $\frac{dD_i}{dx}=D_i^{(1)}$ gesetzt und beachtet, dass

$$D_{i-1}D_i^{(1)}-D_iD_{i-1}^{(1)}\ =\ D(D_{i-1},D_i)$$

ist, so ergiebt sich, dass

$$\frac{d}{dx}\frac{D_0}{D_1}y=\frac{D_0}{D_1}\left[\frac{dy}{dx}-\frac{D(D_0,D_1)}{D_0D_1}y\right]=\frac{D_0}{D_1}A_1(y)$$

---

*) Siehe dieses Journal, Bd. 77, S. 245—257.

ist, wenn gesetzt wird

$$\frac{dy}{dx} - \frac{D(D_0, D_1)}{D_0 D_1} y = A_1(y).$$

Es wird dann ferner

$$\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\frac{D_0}{D_1} y = \frac{D_1}{D_2} \cdot \left[\frac{dA_1(y)}{dx} - \frac{D(D_1, D_2)}{D_1 D_2} A_1(y)\right] = \frac{D_1}{D_2} A_2(A_1(y)),$$

wenn gesetzt wird

$$\frac{dy}{dx} - \frac{D(D_1, D_2)}{D_1 D_2} y = A_2(y).$$

Auf diese Weise fortfahrend, gelangt man schliesslich zu der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{D_{m-1}^2}{D_m D_{m-2}}\frac{d}{dx}\frac{D_{m-2}^2}{D_{m-1} D_{m-3}} \cdots \frac{d}{dx}\frac{D_0}{D_1} y = \frac{D_{m-1}}{D_m} \cdot A_m A_{m-1} \ldots A_2 A_1,$$

wo

$$\frac{dy}{dx} - \frac{D(D_{i-1}, D_i)}{D_{i-1} D_i} y = A_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

und der Kürze halber $A_i A_{i-1}$ für $A_i(A_{i-1})$ geschrieben ist.

Es folgt daher mit Rücksicht auf Gleichung (2.) und wegen

$$\frac{D(D_{i-1}, D_i)}{D_{i-1} D_i} = \frac{d}{dx} \log \frac{D_i}{D_{i-1}}:$$

Der erste Theil der homogenen linearen Differentialgleichung (1.) ***lässt sich in der Form des symbolischen Productes***

$$A_m A_{m-1} \ldots A_2 A_1$$

darstellen, dessen symbolische erste Factoren A_i durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(4.) \qquad A_i = \frac{dy}{dx} - a_i y, \quad a_i = \frac{d}{dx} \log \frac{D_i}{D_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Die Zerlegung des ersten Theils der Differentialgleichung (1.) in symbolische erste Factoren kann auch, wie folgt, bewerkstelligt werden:

Man setze das Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots y_m$ in der Gestalt voraus:

$$(5.) \qquad y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1 \int v_2 dx, \quad \ldots \quad y_m = v_1 \int v_2 dx \ldots \int v_m dx$$

und bilde das mit m willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ behaftete allgemeine Integral

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_1 \int v_2 dx + \cdots + c_m v_1 \int v_2 dx \ldots \int v_m dx.$$

Wird dieses durch v_1 dividirt und differentiirt, hierauf durch v_2 dividirt und

differentiirt, u. s. f., so ergiebt sich die lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}v_{m-1}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_1^{-1}y = 0,$$

in welcher der Coefficient von $\frac{d^m y}{dx^m}$ gleich $(v_1 v_2 \dots v_m)^{-1}$ ist, und der die Ausdrücke (5.) Genüge leisten. Daher muss sein, wie leicht zu erschliessen ist:

$$(6.)\qquad P(y) = (v_1 v_2 \dots v_m)\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}v_{m-1}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_1^{-1}y.$$

Indem mit dem zweiten Theile dieser Gleichung in ähnlicher Weise verfahren wird wie zuvor mit dem zweiten Theile der Gleichung (2.), ergiebt sich die Beziehung:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}v_i^{-1}\frac{d}{dx}v_{i-1}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_1^{-1}y = (v_1 v_2 \dots v_i)^{-1}A_i A_{i-1}\dots A_1, \\ \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\log(v_1 v_2 \dots v_k)}{dx}y = A_k\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt:

Der erste Theil der Differentialgleichung (1.) *ist in der symbolischen Form darstellbar*

$$P(y) = A_m A_{m-1}\dots A_1,$$

wo gesetzt ist:

$$(8.)\qquad A_i = \frac{dy}{dx} - a_i y,\quad a_i = \frac{d}{dx}\log(v_1 v_2 \dots v_i)\qquad (i = 1, 2, \dots m).$$

Dass umgekehrt stets sich m lineare Differentialausdrücke der ersten Ordnung derart bestimmen lassen, dass durch ihre symbolische Zusammensetzung der erste Theil einer vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung hervorgeht, wurde bereits früher von Herrn ***Floquet****), dessen Bezeichnungsweise der ***symbolischen ersten Factoren*** A_i ich beibehalten habe, gezeigt und von ihm für diese letzteren die Form (8.) gefunden. Durch Vergleichung der Ausdrücke in (4.) und (8.) ergiebt sich die Beziehung

$$\frac{D_i}{D_{i-1}} = v_1 v_2 \dots v_i,$$

aus der die Gleichungen folgen:

---

*) Siehe die Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, supplément au tome VIII, pag. 64.

$$(9.)\quad v_1 = D_1,\quad v_1 v_2 = \frac{D_2}{D_1},\quad v_1 v_2 v_3 = \frac{D_3}{D_2},\quad \ldots\quad v_1 v_2 \ldots v_m = \frac{D_m}{D_{m-1}},$$

durch deren Multiplication sich die Beziehung ergiebt

$$v_1^m v_2^{m-1} \ldots v_{m-1}^2 v_m = D_m,$$

welche von *Liouville* und *Fuchs* *) auf anderem Wege gefunden wurde, und die die letzte in der Reihe der aus (9.) unmittelbar folgenden Gleichungen ist:

$$(10.)\quad D_1 = v_1,\quad D_2 = v_1^2 v_2,\quad D_3 = v_1^3 v_2^2 v_3,\quad \ldots\quad D_m = v_1^m v_2^{m-1} \ldots v_m.$$

Durch Division erhält man noch aus (9.):

$$(11.)\quad v_1 = \frac{D_1}{D_0},\quad v_2 = \frac{D_2 D_0}{D_1^2},\quad v_3 = \frac{D_3 D_1}{D_2^2},\quad \ldots\quad v_m = \frac{D_m D_{m-2}}{D_{m-1}^2},$$

vermöge welcher letzteren Formeln das Fundamentalsystem von Integralen (5.) auch in der Form geschrieben werden kann

$$y_1 = D_1,\quad y_2 = D_1 \int \frac{D_2 D_0}{D_1^2}\,dx,\quad y_3 = D_1 \int \frac{D_2 D_0}{D_1^2}\,dx \int \frac{D_3 D_1}{D_2^2}\,dx,\quad \ldots$$
$$y_m = D_1 \int \frac{D_2 D_0}{D_1^2}\,dx \ldots \int \frac{D_m D_{m-2}}{D_{m-1}^2}\,dx,$$

wie aus Gleichung (2.) auch unmittelbar abzuleiten ist. —

Für den ersten Theil der der Differentialgleichung (1.) *adjungirten*

$$(12.)\quad P_1(z) = \frac{d^m z}{dx^m} - \frac{d^{m-1}(p_1 z)}{dx^{m-1}} + \cdots + (-1)^m p_m z = 0$$

hat Herr *Frobenius* die Darstellung gefunden **):

$$(13.)\quad P_1(z) = \frac{D_0}{D_1} \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \frac{D_2^2}{D_3 D_1} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_{m-1}^2}{D_m D_{m-2}} \frac{d}{dx} \frac{D_m}{D_{m-1}} z.$$

Die Anwendung des bei der Gleichung (2.) beobachteten Verfahrens auf dieselbe ergiebt, dass sich $P_1(z)$ in der symbolischen Form darstellen lässt:

$$(14.)\quad P_1(z) = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{m-1} \mathfrak{A}_m,$$

wo gesetzt ist:

$$(15.)\quad \mathfrak{A}_i = \frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx} \log \frac{D_i}{D_{i-1}} z \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Vermöge der Formeln (10.) kann die Gleichung (13.) auch in der Form geschrieben werden:

---

*) Siehe dieses Journal, Bd. 66, S. 130.

**) Siehe dieses Journal, Bd. 77, S. 257.

$$(16.)\qquad P_1(z) = v_1^{-1}\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z;$$

andrerseits ist, wie leicht zu erhalten:

$$(17.)\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{dx}v_{m-i}^{-1}\dfrac{d}{dx}v_{m-i+1}^{-1}\dfrac{d}{dx}\cdots\dfrac{d}{dx}v_m^{-1}\dfrac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z\\ \qquad = (v_1v_2\dots v_{m-i-1})\mathfrak{A}_{m-i+1}\mathfrak{A}_{m-i}\dots\mathfrak{A}_m.\end{cases}$$

Es ist ferner, wie sich unschwer verificiren lässt:

$$\begin{aligned}
&z(v_1v_2\dots v_m)\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}v_{m-1}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_1^{-1}y\\
&\qquad-(-1)^m y v_1^{-1}\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z\\
&=\frac{d}{dx}\Big\{[(v_1v_2\dots v_m)z].\Big[v_m^{-1}\frac{d}{dx}v_{m-1}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_1^{-1}y\Big]\\
&-\Big[v_m^{-1}\frac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z\Big].\Big[v_{m-1}^{-1}\frac{d}{dx}v_{m-2}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_1^{-1}y\Big]\\
&+\Big[v_{m-1}^{-1}\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z\Big].\Big[v_{m-2}^{-1}\frac{d}{dx}v_{m-3}^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_1^{-1}y\Big]\\
&-\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+(-1)^{m-2}\Big[v_3^{-1}\frac{d}{dx}v_4^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z\Big].\Big[v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_1^{-1}y\Big]\\
&+(-1)^{m-1}\Big[v_2^{-1}\frac{d}{dx}v_3^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}v_m^{-1}\frac{d}{dx}(v_1v_2\dots v_m)z\Big].[v_1^{-1}y]\Big\}.
\end{aligned}$$

Diese Identität geht mit Hülfe der Formeln (7.) und (17.) über in

$$\begin{aligned}
&zA_mA_{m-1}\dots A_2A_1(y)-(-1)^m y\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\dots\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{A}_m(z)\\
&=\frac{d}{dx}\{zA_{m-1}A_{m-2}\dots A_1(y)-\mathfrak{A}_m(z).A_{m-2}A_{m-3}\dots A_1(y)\\
&+\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{A}_m(z).A_{m-3}A_{m-4}\dots A_1(y)-\mathfrak{A}_{m-2}\mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{A}_m(z)A_{m-4}A_{m-5}\dots A_1(y)\\
&+\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+(-1)^{m-2}\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\dots\mathfrak{A}_m(z).A_1(y)+(-1)^{m-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\dots\mathfrak{A}_m(z).y\}
\end{aligned}$$

und drückt somit den Satz aus, dass von den beiden Gleichungen

$$A_mA_{m-1}\dots A_1(y)=0 \quad\text{und}\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\dots\mathfrak{A}_m(z)=0$$

eine jede die Multiplicatorgleichung der anderen ist.

Diese zwischen den beiden Differentialgleichungen $P(y)=0$ und $P_1(z)=0$ stattfindende reciproke Beziehung *) findet auch in dem folgenden Satze Ausdruck:

Werden sämmtliche Integrale der Differentialgleichung $P(y)=0$ *mit*

*) Vergl. *Frobenius* in diesem Journal Bd. 77, S. 255, Gl. (24.) und Bd. 76, S. 264.

einer Grösse multiplicirt, so werden hierdurch die Integrale der Differentialgleichung $P_1(z) = 0$ sämmtlich durch dieselbe Grösse dividirt, und umgekehrt.

Multiplicirt man nämlich die Fundamentalintegrale $y_1, y_2, \dots y_m$ mit der beliebigen Grösse f, so verwandelt sich

$$a_i = \frac{d}{dx}\log\frac{D_i}{D_{i-1}} \quad \text{in} \quad b_i = \frac{d}{dx}\log\frac{D(fy_1, \dots fy_i)}{D(fy_1, \dots fy_{i-1})},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Formel (3.) in

$$b_i = \frac{d}{dx}\log f\frac{D_i}{D_{i-1}} = a_i + \frac{d}{dx}\log f,$$

und es findet die Identität statt

$$f.P\left(\frac{y}{f}\right) = B_m B_{m-1} \dots B_1, \quad B_i = \frac{dy}{dx} - b_i y \qquad (i = 1, 2, \dots m).$$

Bezeichnen dann η_i und η'_i beziehungsweise die Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung $A_i = 0$ und $B_i = 0$, so ist offenbar

$$(18.) \qquad \eta_i = \frac{D_i}{D_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

und

$$\eta'_i = f.\frac{D_i}{D_{i-1}},$$

so dass die Multiplication von $y_1, y_2, \dots y_m$ mit f auch die Multiplication der Integrale η_i mit f bewirkt, während gleichzeitig die Integrale $\zeta_i = \eta_i^{-1}$ der Gleichungen $\mathfrak{A}_i = 0$ $(i = 1, \dots m)$ durch f dividirt werden.

Aus (18.) ergiebt sich ferner die Formel

$$(19.) \qquad \frac{\eta_i}{\eta_{i-1}} = \frac{D_i D_{i-2}}{D_{i-1}^2},$$

mit Hülfe welcher die Gleichungen (2.) und (13.) die Gestalt annehmen

$$(20.) \qquad P(y) = \eta_m \frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-1}}{\eta_m}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-2}}{\eta_{m-1}}\frac{d}{dx}\dots\frac{d}{dx}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{\eta_1},$$

$$(21.) \qquad P_1(z) = \frac{1}{\eta_1}\frac{d}{dx}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{d}{dx}\frac{\eta_2}{\eta_3}\frac{d}{dx}\dots\frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-1}}{\eta_m}\frac{d}{dx}\eta_m z,$$

aus der zu entnehmen ist, dass die Differentialgleichungen $P(y) = 0$ und $P_1(z) = 0$ beziehungsweise die Fundamentalsysteme von Integralen zulassen:

$$(22.) \quad \begin{cases} y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx, \quad y_3 = \eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{\eta_3}{\eta_2}dx, \quad \dots \\ y_m = \eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\dots\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx, \end{cases}$$

$$(23.) \quad \begin{cases} z_1 = \eta_m^{-1}, \quad z_2 = \eta_m^{-1}\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx, \quad z_3 = \eta_m^{-1}\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx\int\frac{\eta_{m-1}}{\eta_{m-2}}dx, \quad \dots \\ z_m = \eta_m^{-1}\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx\dots\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx. \end{cases}$$

Die Multiplication der Integrale $y_1, y_2, \dots y_m$ mit f verwandelt η_i in $f\eta_i$, lässt also die Quotienten $\frac{\eta_i}{\eta_{i-1}}$ ungeändert, weshalb, wie aus (23.) ersichtlich ist, in der That $z_1, z_2, \dots z_m$ in

$$\frac{z_1}{f}, \quad \frac{z_2}{f}, \quad \dots \quad \frac{z_m}{f}$$

übergeführt werden.

2.

Von besonderem Interesse ist der Fall, da in der Gleichung (20.) der vorigen Nummer die Grössen η_i unter einander beliebig vertauschbar sind.

Macht man

$$\eta_{k-2}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{k-3}}{\eta_{k-2}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{y}{\eta_1} = S$$

und vertauscht in der erwähnten Gleichung η_k mit η_{k-1}, so werden offenbar die beiden Ausdrücke

$$\eta_m\frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-1}}{\eta_m}\cdots\frac{d}{dx}\frac{\eta_k}{\eta_{k+1}}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{k-1}}{\eta_k}\frac{d}{dx}\frac{S}{\eta_{k-1}},$$

$$\eta_m\frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-1}}{\eta_m}\cdots\frac{d}{dx}\frac{\eta_{k-1}}{\eta_{k+1}}\frac{d}{dx}\frac{\eta_k}{\eta_{k-1}}\frac{d}{dx}\frac{S}{\eta_k}$$

identisch gleich sein, wenn

$$\eta_k\frac{d}{dx}\frac{\eta_{k-1}}{\eta_k}\frac{d}{dx}\frac{S}{\eta_{k-1}} = \eta_{k-1}\frac{d}{dx}\frac{\eta_k}{\eta_{k-1}}\frac{d}{dx}\frac{S}{\eta_k}$$

ist, oder wenn, wie aus der Gleichsetzung der gleich hohen Ableitungen von S auf beiden Seiten dieser letzten Gleichung hervorgeht, die Bedingung erfüllt ist

$$(1.)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\log\eta_{k-1} = \frac{d^2}{dx^2}\log\eta_k \qquad (k=2, 3, \dots m).$$

Es bedarf keines weiteren Beweises, dass die Gleichung (1.) zugleich auch die Bedingung dafür ist, dass die Grössen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_k$ in der Gleichung (20.) der No. 1. unter einander *beliebig* vertauscht werden dürfen.

Mit Hülfe der Formel (19.) in No. 1. folgt aus (1.)

$$(2.)\qquad \frac{D_k D_{k-2}}{D_{k-1}^2} = g_k e^{c_k x},$$

wo g_k und c_k willkürliche Constanten bezeichnen. Hiermit verwandelt sich die

Gleichung (2.) der No. 1. in:

$$P(y) = \frac{D_m}{D_{m-1}}\frac{d}{dx}(g_m e^{c_m x})^{-1}\frac{d}{dx}(g_{m-1}e^{c_{m-1}x})^{-1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}(g_2 e^{c_2 x})^{-1}\frac{d}{dx}\frac{y}{y_1},$$

oder nach Ausführung der angezeigten Operationen in

$$P(y) = \frac{D_m}{D_{m-1}} g_2 g_3 \dots g_m e^{-(c_2+c_3+\cdots+c_m)x}$$
$$\times \left\{\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{y}{y_1}\right)+\mathfrak{p}_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{y}{y_1}\right)+\cdots+\mathfrak{p}_{m-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)\right\},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_{m-1}$ constante, aus den c_i zusammengesetzte Grössen bedeuten.

Die letzte Gleichung endlich verwandelt sich, da, wie aus (2.) folgt,

$$g_2 g_3 \dots g_m e^{(c_2+c_3+\cdots+c_m)x} = \frac{D_m}{D_{m-1}}\cdot\frac{D_0}{D_1} = \frac{D_m}{D_{m-1}}\cdot\frac{1}{y_1}$$

ist, in

$$(3.)\quad P(y) = (g_2 g_3 \dots g_m)^2 y_1 \cdot \left\{\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{y}{y_1}\right)+\mathfrak{p}_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{y}{y_1}\right)+\cdots+\mathfrak{p}_{m-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)\right\}.$$

Dieses ist demnach die Form derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung m^ter Ordnung, für welche die Grössen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ *in der Gleichung* (20.) *der No. 1., und somit auch vermöge der Bedeutung dieser Grössen, die symbolischen ersten Factoren* $A_1, A_2, \dots A_m$ *) *in*

$$P(y) = A_m A_{m-1} \dots A_1$$

in beliebiger Ordnung unter einander vertauschbar sind.

Offenbar gilt die Bedingung (1.) auch für die Vertauschbarkeit von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ in der Gleichung (21.) der No. 1: durch Entwickelungen, welche den eben gemachten analog sind, ergiebt sich, dass in diesem Falle die letzterwähnte Gleichung übergeht in

$$P_1(z) = \frac{1}{\eta_m}\cdot\left\{\frac{d^m}{dx^m}(\eta_m z)+\mathfrak{q}_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(\eta_m z)+\cdots+\mathfrak{q}_{m-1}\frac{d}{dx}(\eta_m z)\right\},$$

wo $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots \mathfrak{q}_{m-1}$ ähnlich beschaffene Constanten wie die $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_{m-1}$ sind, oder, weil nach No. 1. $\frac{1}{\eta_m}$ das Integral von $\mathfrak{A}_m = 0$, somit auch ein Integral z_1 von $P_1(z) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\dots\mathfrak{A}_m = 0$ ist, in

$$P_1(z) = z_1\cdot\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{z}{z_1}\right)+\mathfrak{q}_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{z}{z_1}\right)+\cdots+\mathfrak{q}_{m-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{z_1}\right)\right\},$$

als die Form desjenigen Differentialausdruckes, welcher dem in (3.) *adjungirt*

---

*) Vgl. zur Vertauschbarkeit der Factoren A_i: *Floquet* in den Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Supplément au tome VIII pag. 104—108.

ist, und dessen symbolische erste Factoren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_m$ gleichfalls beliebig vertauschbar sind.

Wenn in Gleichung (3.) die angezeigten Differentiationen ausgeführt werden, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + \frac{f_1}{y_1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2}{y_1^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{f_m}{y_1^m}y,$$

wo $f_1, f_2, \dots f_m$ ganze Functionen von y_1 und von dessen Ableitungen sind. — Ist $y_1 = x^n$, wo n eine ganze positive Zahl, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + \frac{P_1(x)}{x}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{x^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{x^m}y,$$

wo $P_1(x), \dots P_{m-2}(x)$ ganze Functionen von x beziehungsweise des $1^{\text{ten}}, \dots (m-2)^{\text{ten}}$ Grades, $P_{m-1}(x)$ und $P_m(x)$ ebensolche Functionen des $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades sind. Diese Differentialgleichung gehört demnach zur Klasse der *Fuchs*schen Differentialgleichungen *), und ihre auf den singulären Punkt $x = 0$ bezügliche determinirende Fundamentalgleichung ist

$$r(r-1)\dots(r-m+1) + r(r-1)\dots(r-m+2)P_1(0) + \cdots$$
$$\cdots + r(r-1)P_{m-2}(0) + rP_{m-1}(0) + P_m(0) = 0.$$

Die Wurzeln der letzteren sind die Zahlen

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \dots \quad n+m-1,$$

wie daraus hervorgeht, dass

$$P_m(0) = (-1)^m . n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)$$

ist. Hieraus und aus der Beschaffenheit der Gleichung (3.) folgt, dass der Punkt $x = 0$ bloss ein ausserwesentlich singulärer ist **).

Gleiches gilt von den Punkten $x = a$, $x = b, \dots$ hinsichtlich jener Differentialgleichung, die aus (3.) hervorgeht, wenn daselbst

$$y_1 = (x-a)^{n_1}(x-b)^{n_2}\dots$$

angenommen wird.

Setzt man in der Differentialgleichung (3.) $y_1 = e^{cx}$, wo c constant, so geht dieselbe in die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten über.

---

*) Siehe dieses Journal, Bd. 68, Seite 360 und Bd. 66, Seite 146.

**) Siehe *Fuchs* in diesem Journal, Bd. 68, Seite 378.

3.

Wenn in der algebraischen Gleichung m^{ten} Grades

$$f(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}^m + a_1\mathfrak{y}^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

welche die k-fache Wurzel $\mathfrak{y}_1$ besitzt, die Substitution gemacht wird: $\mathfrak{y} = \mathfrak{z} + \mathfrak{y}_1$, so verwandelt sich dieselbe bekanntlich in die Gleichung

$$f(\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}) = f(\mathfrak{y}_1) + \mathfrak{z} f'(\mathfrak{y}_1) + \frac{\mathfrak{z}^2}{2} f''(\mathfrak{y}_1) + \cdots + \frac{\mathfrak{z}^m}{m!} f^{(m)}(\mathfrak{y}_1) = 0,$$

deren Grad, in Folge der stattfindenden Gleichungen

$$(\alpha.) \quad f(\mathfrak{y}_1) = 0, \quad f'(\mathfrak{y}_1) = 0, \quad \ldots \quad f^{(k-1)}(\mathfrak{y}_1) = 0$$

durch Division mit $\mathfrak{z}^k$ um k Einheiten erniedrigt werden kann. —

Ist y_1 ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1.) in No. 1.:

$$(1.) \quad P(y) = 0,$$

und macht man daselbst die Substitutionen

$$(2.) \quad y = xy_1, \quad x^2 y_1, \quad \ldots,$$

so ergiebt sich aus den Substitutionsresultaten

$$(3.) \quad \begin{cases} P(x y_1) = x\,[y_1^{(m)} + p_1 y_1^{(m-1)} + \cdots + p_m y_1] \\ \qquad + \; [m y_1^{(m-1)} + (m-1) p_1 y_1^{(m-2)} + \cdots + p_{m-1} y_1], \\ P(x^2 y_1) = x^2 [y_1^{(m)} + p_1 y_1^{(m-1)} + \cdots + p_m y_1] \\ \qquad + 2x [m y_1^{(m-1)} + (m-1) p_1 y_1^{(m-2)} + \cdots + p_{m-1} y_1] \\ + 1.2 [m(m-1) y_1^{(m-2)} + (m-1)(m-2) p_1 y_1^{(m-3)} + \cdots + 2 p_{m-2} y_1], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

dass, wenn die Differentialgleichung (1.) nebst y_1 auch noch die Grössen $y_1 x$, $y_1 x^2$, $\ldots$ $y_1 x^{k-1}$ als Lösungen zulässt, das Integral y_1 gleichzeitig die $k-1$, den Gleichungen (α.) analog gebauten Differentialgleichungen

$$m(m-1)\ldots(m-\varrho+1) \frac{d^{m-\varrho} y}{dx^{m-\varrho}} + (m-1)\ldots(m-\varrho) p_1 \frac{d^{m-\varrho-1} y}{dx^{m-\varrho-1}} + \cdots + \varrho p_{m-\varrho} y = 0,$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots k-1)$$

befriedigt.

Die Substitutionen (2.) gehen aus der bekannten Substitution $y = y_1 \int z\, dx$ hervor, wenn in dieser für z der Reihe nach die Werthe $1, 2x, \ldots (k-1)x^{k-2}$ gesetzt werden. Nun ist:

$$
(4.)\quad \begin{cases} P\left(y_1 \int z\,dx\right) \\ = \int z\,dx.[y_1^{(m)}+p_1 y_1^{(m-1)}+\cdots+p_m y_1]+z.[m_1 y_1^{(m-1)}+(m-1)_1 p_1 y_1^{(m-2)}+\cdots+p_{m-1}y_1] \\ +z^{(1)}.[m_2 y_1^{(m-2)}+(m-1)_2 p_1 y_1^{(m-3)}+\cdots+p_{m-2}y_1]+\cdots \\ \cdots+z^{(m-2)}[m_1 y_1^{(1)}+p_1 y_1]+z^{(m-1)}.y_1, \end{cases}
$$

wo $m_i = \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i}$, und sowie in (3.) $y_1^{(i)} = \frac{d^i y_1}{dx^i}$ ist.

Unter der Voraussetzung, dass $P(y_1) = 0$ ist, verschwindet in Gleichung (4.) der Coefficient von $\int z\,dx$, und es wird

$$
\frac{1}{y_1}\cdot P\left(y_1 \int z\,dx\right) = \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \cdots + q_{m-2}\frac{dz}{dx} + q_{m-1}z,
$$

$$
q_{m-i} = \frac{1}{y_1}[m_i y_1^{(m-i)} + (m-1)_i p_1 y_1^{(m-i-1)} + \cdots + (i+1)_i p_{m-i-1} y_1^{(1)} + i_i p_{m-i} y_1]
$$
$$
(i = 1,\ 2,\ \dots\ m-1).
$$

In Folge der Gleichungen (3.) ist aber auch

$$
q_{m-i} = \frac{1}{1.2\dots i.y_1}\cdot[P(x^i y_1) - i_1 x P(x^{i-1}y_1) + i_2 x^2 P(x^{i-2}y_1) - \cdots + (-1)^i x^i P(y_1)],
$$
$$
(i = 1,\ 2,\ \dots\ m-1),
$$

woraus folgt:

Wenn die Differentialgleichung $P(y) = 0$ die k particulären Integrale $y_1,\ xy_1,\ x^2y_1,\ \dots\ x^{k-1}y_1$ zulässt, so verschwinden in der transformirten Differentialgleichung $\frac{1}{y_1}P\left(y_1\int z\,dx\right) = 0$ die $k-1$ letzten Coefficienten q_{m-1}, $q_{m-2},\ \dots\ q_{m-k+1}$ identisch, und daher wird, indem $\frac{d^{k-1}z}{dx^{k-1}} = t$ gesetzt wird, die Ordnung der Differentialgleichung $P(y) = 0$ um k Einheiten erniedrigt.

Es ist demnach die Substitution $y = y_1\int z dx$ in die Differentialgleichung (1.) vollständig analog der Substitution $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}$ in die algebraische Gleichung $f(\mathfrak{y}) = 0$, sowie andrerseits die k particulären Integrale $y_1,\ xy_1,\ \dots\ x^{k-1}y_1$, auf welche Herr *Brassinne* *) zuerst aufmerksam gemacht hat, für die Differentialgleichung eine ähnliche Bedeutung haben, wie eine k-fache Wurzel für die algebraische Gleichung.

Das Vorhandensein dieser Integrale bringt in den Determinanten $D_1,\ D_2,\ \dots\ D_k$ der Differentialgleichung (2.) der No. 1., und in dieser selbst, eine einfache Veränderung hervor: Es ist nämlich, mit Rücksicht auf die Formel (3.) in No. 1. für $\varrho = 1,\ 2,\ \dots\ k$

$$
D_\varrho = D(y_1,\ xy_1,\ x^2y_1,\ \dots\ x^{\varrho-1}y_1) = y_1^\varrho . D(1,\ x,\ x^2,\ \dots\ x^{\varrho-1}),
$$

---

*) Siehe *Sturms* Cours d'Analyse, Anhang, Note III, pag. 334.

und da die Determinante

$$D(1,\ x,\ \dots\ x^{\varrho-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{\varrho-1} \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (\varrho-1)x^{\varrho-2} \\ 0 & 0 & 1.2 & 2.3x & \dots & (\varrho-2)(\varrho-1)x^{\varrho-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1.2.3 & \dots & (\varrho-3)(\varrho-2)(\varrho-1)x^{\varrho-4} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1.2.3\dots(\varrho-1) \end{vmatrix}$$

sich auf ihr Anfangsglied $1!2!3!\dots(\varrho-1)!$ reducirt, so wird

$$D_\varrho = 1!2!3!\dots(\varrho-1)!.y_1^\varrho.$$

Hieraus folgt

$$(5.)\qquad \frac{D_\varrho}{D_{\varrho-1}} = (\varrho-1)!y_1$$

und

$$\frac{D_\varrho D_{\varrho-2}}{D_{\varrho-1}^2} = \varrho-1 \qquad\qquad (\varrho = 2,\ \dots\ k).$$

Mit Hülfe dieser Formeln verwandelt sich die Differentialgleichung (2.) der No. 1. in die folgende

$$(6.)\qquad P(y) = \frac{D_m}{D_{m-1}}\frac{d}{dx}\frac{D_{m-1}^2}{D_m D_{m-2}}\frac{d}{dx}\dots\frac{d}{dx}\frac{D_{k+1}^2}{D_{k+2}D_k}\frac{d}{dx}\frac{D_k}{D_{k+1}}y_1\frac{d^k}{dx^k}\frac{y}{y_1},$$

die in der That, wie unmittelbar zu erkennen, die k Integrale $y_1, xy_1, \dots x^{k-1}y_1$ zulässt.

Zufolge (5.) ist gleichzeitig

$$a_\varrho = \frac{d}{dx}\log\frac{D_\varrho}{D_{\varrho-1}} = \frac{d}{dx}\log y_1,$$

somit:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k,$$

so dass, wie bereits Herr *Floquet* auf andere Weise gezeigt hat *), im Falle des Vorhandenseins der k Integrale $y_1,\ xy_1,\ \dots\ x^{k-1}y_1$ in der Gleichung

$$P(y) = A_m A_{m-1}\dots A_1$$

die k letzten Factoren $A_1,\ \dots\ A_k$ einander gleich sind.

Man findet leicht, dass der zum Differentialausdrucke (6.) *adjungirte* die Gestalt hat

$$P_1(z) = \frac{1}{y_1}\frac{d^k}{dx^k}y_1\frac{D_k}{D_{k+1}}\frac{d}{dx}\frac{D_{k+1}^2}{D_{k+2}D_k}\frac{d}{dx}\dots\frac{d}{dx}\frac{D_m}{D_{m-1}}z,$$

und dass in $P_1(z) = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\dots\mathfrak{A}_m$ die k ersten Factoren einander gleich sind.

*) Siehe die Annales Scient. de l'École Normale, supplément au tome VIII, pag. 98.

4.

Die Form, in welcher nach Gleichung (20.) der No. 1. der erste Theil der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1.)\qquad P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0$$

darstellbar ist, kann benutzt werden, um die Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichung

$$(2.)\qquad P(y) = p$$

auszuführen, wo p eine Function von x.

Wie man unmittelbar ersieht, ergiebt sich nämlich aus

$$(3.)\qquad \eta_m \frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-1}}{\eta_m}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{\eta_1} = p$$

das Integral der Differentialgleichung (2.) in der Gestalt

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} y = {} & \eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{\eta_3}{\eta_2}dx\cdots\int\frac{\eta_{m-1}}{\eta_{m-2}}dx\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx\int\frac{p}{\eta_m}dx \\ & + c_m\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{\eta_3}{\eta_2}dx\cdots\int\frac{\eta_{m-1}}{\eta_{m-2}}dx\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx \\ & + c_{m-1}\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{\eta_3}{\eta_2}dx\cdots\int\frac{\eta_{m-1}}{\eta_{m-2}}dx \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + c_3\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{\eta_3}{\eta_2}dx + c_2\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx + c_1\eta_1, \end{aligned}\right.$$

oder, wenn man mit $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) bezeichnet, mit Rücksicht auf die für die letzteren geltenden Ausdrücke (22.) der No. 1., in der Gestalt

$$(5.)\qquad y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m + \eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{\eta_3}{\eta_2}dx\cdots\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx\int\frac{p}{\eta_m}dx,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürliche Constanten bedeuten.

Der einfachste Fall ist die Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(6.)\qquad \frac{dy}{dx} + Py = Q.$$

Hier ist $\eta_1 = ce^{-\int Pdx}$, daher dieselbe in der Form darstellbar

$$e^{-\int Pdx}\frac{d}{dx}\frac{y}{e^{-\int Pdx}} = Q,$$

woraus unmittelbar das bekannte Integral folgt:

$$(7.)\qquad y = ce^{-\int Pdx} + e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx,\quad c = \text{const.}$$

Der Ausdruck (4.) ist aus $m+1$ Functionen zusammengesetzt, welche,

wie leicht zu sehen, von einander linear unabhängig sind: Bestünde nämlich zwischen denselben eine homogene lineare Beziehung mit den von Null verschiedenen Coefficienten $k_1, k_2, \dots k_{m+1}$, die also, wenn der Kürze halber $m = 2$ angenommen wird, die Form hätte

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}\,dx + k_3\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\int\frac{p}{\eta_2}dx = 0,$$

so würde, wenn man durch η_1 dividirt und differentiirt, hierauf durch $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ dividirt und differentiirt, die Gleichung erfolgen:

$$k_3\frac{p}{\eta_2} = 0,$$

welche der Annahme, dass k_3 von Null verschieden ist, widerspricht *). Die erwähnten Functionen sind demnach in der That linear unabhängig, woraus folgt, dass dieselben ein Fundamentalsystem von Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellen, welche, wie der Anblick dieser Functionen und die Gleichungen (20.) und (22.) in No. 1. erkennen lassen, die folgende ist:

$$p\frac{d}{dx}\frac{\eta_m}{p}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-1}}{\eta_m}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{m-2}}{\eta_{m-1}}\cdots\frac{d}{dx}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{d}{dx}\frac{y}{\eta_1} = 0,$$

und die mit Rücksicht auf Gleichung (20.) in No. 1. auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(8.)\qquad p\frac{d}{dx}\frac{P(y)}{p} = 0.$$

Hieraus folgt, wie auch in anderer Art zu erweisen ist:

Das Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $P(y) = p$ genügt der homogenen linearen Differentialgleichung $(m+1)^{ter}$ Ordnung

$$p\frac{d}{dx}\frac{P(y)}{p} = 0.$$

Schreibt man in der Gleichung (2.) ap, wo a eine beliebige Constante, an Stelle von p, so bleibt die Gleichung (8.) ungeändert, was darin begründet ist, dass das Integral der Gleichung

$$(9.)\qquad P(y) = ap$$

den Ausdruck hat

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m + a\eta_1\int\frac{\eta_2}{\eta_1}dx\dots\int\frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}dx\int\frac{p}{\eta_m}dx,$$

der wegen der Willkürlichkeit der Constanten $c_1, \dots c_m, a$ das allgemeine

*) Diese Beweisart wurde zuerst von Herrn *Fuchs* bei einer anderen Gelegenheit angewendet: Siehe dessen berühmte Arbeit in diesem Journal, Bd. 66, No. 2, S. 130.

Integral der Gleichung (8.) vorstellt. Hieraus geht hervor, dass einerseits die Gleichung (9.) eine *erste Integralgleichung* der Differentialgleichung (8.) ist, und somit andererseits nur dasjenige aus $m+1$ linear unabhängigen particulären Integralen zusammengesetzte Integral der letztern umgekehrt auch die Gleichung (2.) befriedigt, in welchem das die Function p enthaltende particuläre Integral mit keiner Constanten behaftet erscheint.

So genügt das aus den zwei linear unabhängigen Functionen

$$e^{-\int P dx} \quad \text{und} \quad e^{-\int P dx}\int Q e^{\int P dx} dx$$

bestehende Integral (7.) der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Q\frac{d^2y}{dx^2}+\left(PQ-\frac{dQ}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(Q\frac{dP}{dx}-P\frac{dQ}{dx}\right)y = 0,$$

während umgekehrt das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$y = c_1 e^{-\int P dx}+c_2 e^{-\int P dx}\int Q e^{\int P dx} dx$$

die Gleichung (6.) nur dann befriedigt, wenn von den beiden willkürlichen Constanten c_1 und c_2 letztere gleich Eins ist.

Zum Schlusse mögen noch die Formen angeführt werden, in welchen sich die bekannten Differentialgleichungen gemäss den Gleichungen (2.) und (20.) in No. 1. darstellen lassen.

Für die Differentialgleichung

$$(10.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+c_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+c_m y = 0$$

mit constanten Coefficienten ist

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{i-1} & r_2^{i-1} & \dots & r_i^{i-1} \end{vmatrix} \times e^{(r_1+r_2+\cdots+r_i)x} \qquad (i=1, \dots m),$$

wo $r_1, r_2, \dots r_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$r^m+c_1 r^{m-1}+\cdots+c_m = 0$$

sind. Es ist daher

$$a_i = \frac{d}{dx}\log\frac{D_i}{D_{i-1}} = r_i,$$

und somit die Differentialgleichung (10.) in der Form darstellbar:

$$e^{r_m x}\frac{d}{dx}e^{-(r_m-r_{m-1})x}\frac{d}{dx}e^{-(r_{m-1}-r_{m-2})x}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}e^{-(r_2-r_1)x}\frac{d}{dx}e^{-r_1 x}y = 0.$$

Für die Differentialgleichung

$$(11.)\quad \frac{d^m y}{dx^m}+\frac{k_1}{x}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+\frac{k_m}{x^m}y = 0,$$

wo $k_1, \dots k_m$ constant sind, ist

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_i \\ r_1(r_1-1) & r_2(r_2-1) & \dots & r_i(r_i-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1(r_1-1)\dots(r_1-i+2) & r_2(r_2-1)\dots(r_2-i+2) & \dots & r_i(r_i-1)\dots(r_i-i+2) \end{vmatrix} \times x^{r_1+r_2+\dots+r_i-\frac{i(i-1)}{2}} \qquad (i=1,\dots m),$$

wo $r_1, r_2, \dots r_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1)\dots(r-m+1)+k_1 r(r-1)\dots(r-m+2)+\dots+k_m = 0$$

sind. Somit ist hier

$$a_i = \frac{d}{dx}\log\frac{D_i}{D_{i-1}} = \frac{r_i-i+1}{x},$$

und die Gleichung (11.) in der Form darstellbar:

$$x^{r_m-m+1}\frac{d}{dx}x^{-(r_m-r_{m-1}-1)}\frac{d}{dx}x^{-(r_{m-1}-r_{m-2}-1)}\frac{d}{dx}\dots\frac{d}{dx}x^{-(r_2-r_1-1)}\frac{d}{dx}x^{-r_1}y = 0.$$

Für die *Fuchs*sche Differentialgleichung *) endlich

$$(12.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+\frac{P_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\dots+\frac{P_m(x)}{(x-a)^m}y = 0$$

ist

$$D_i = (x-a)^{r_1+r_2+\dots+r_i-\frac{i(i-1)}{2}}.f_i(x) \qquad (i=1,\dots m),$$

wo $r_1, r_2, \dots r_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1)\dots(r-m+1)+P_1(a)r(r-1)\dots(r-m+2)+\dots+P_m(a) = 0$$

sind, und $f_i(x)$ eine Function bezeichnet, die in der Umgebung des Punktes $x=a$ eindeutig, endlich und für $x=a$ von Null verschieden ist. Es ist daher

$$a_i = \frac{d}{dx}\log\frac{D_i}{D_{i-1}} = \frac{g_i(x)}{x-a},$$

wo $g_i(x)$ in der Umgebung des Punktes a eindeutig und endlich ist, weshalb die Differentialgleichung (12.) auf die Form gebracht werden kann:

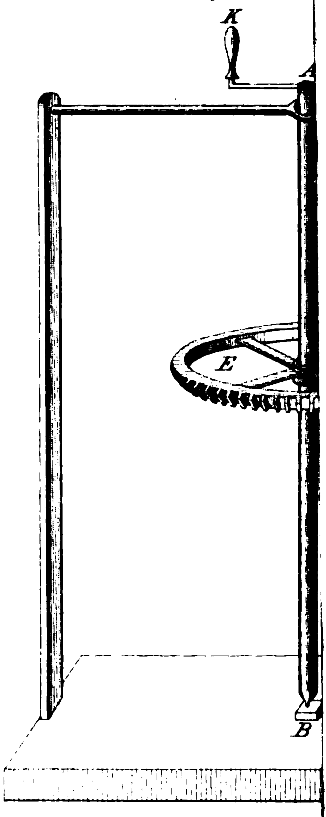
$$(x-a)^{r_m-m+1}\psi_m(x)\frac{d}{dx}(x-a)^{-(r_m-r_{m-1}-1)}\frac{\psi_{m-1}(x)}{\psi_m(x)}\frac{d}{dx}\dots$$

$$\dots\frac{d}{dx}(x-a)^{-(r_2-r_1-1)}\frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}\frac{d}{dx}\frac{y}{(x-a)^{r_1}\psi_1(x)} = 0,$$

wo $\psi_i(x)$ in der Umgebung des Punktes a eindeutig, endlich und für $x=a$ von Null verschieden ist.

*) Siehe dieses Journal Bd. 68, S. 364 und Bd. 66, S. 146.

Zu Boltzmann, über die Eigenschaften



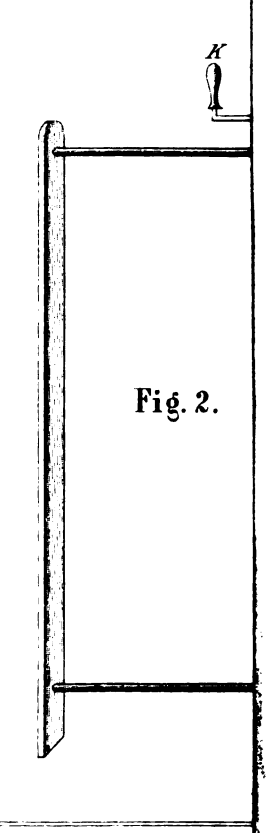
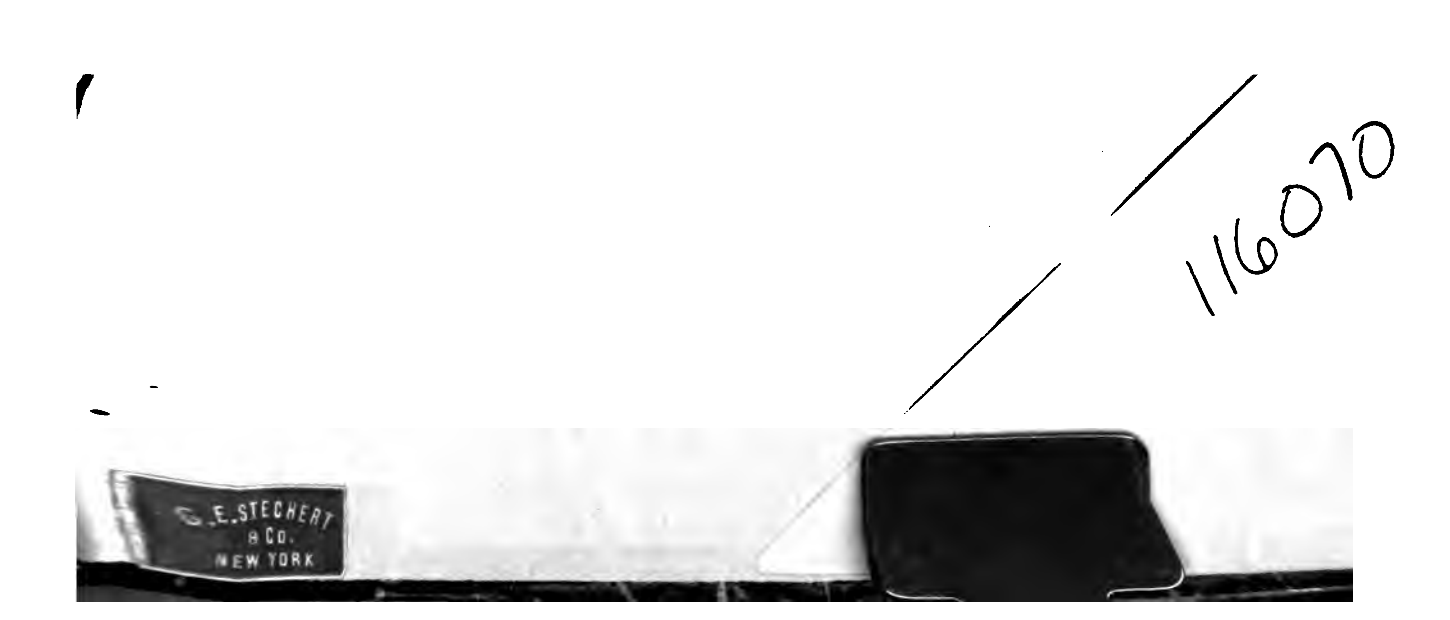


Fig. 2.

Fig. 6.

Fig. 4.

Lith. Anst. v. Leop. Kraatz, Berlin.


G. E. STECHERT
& Co.
NEW YORK

